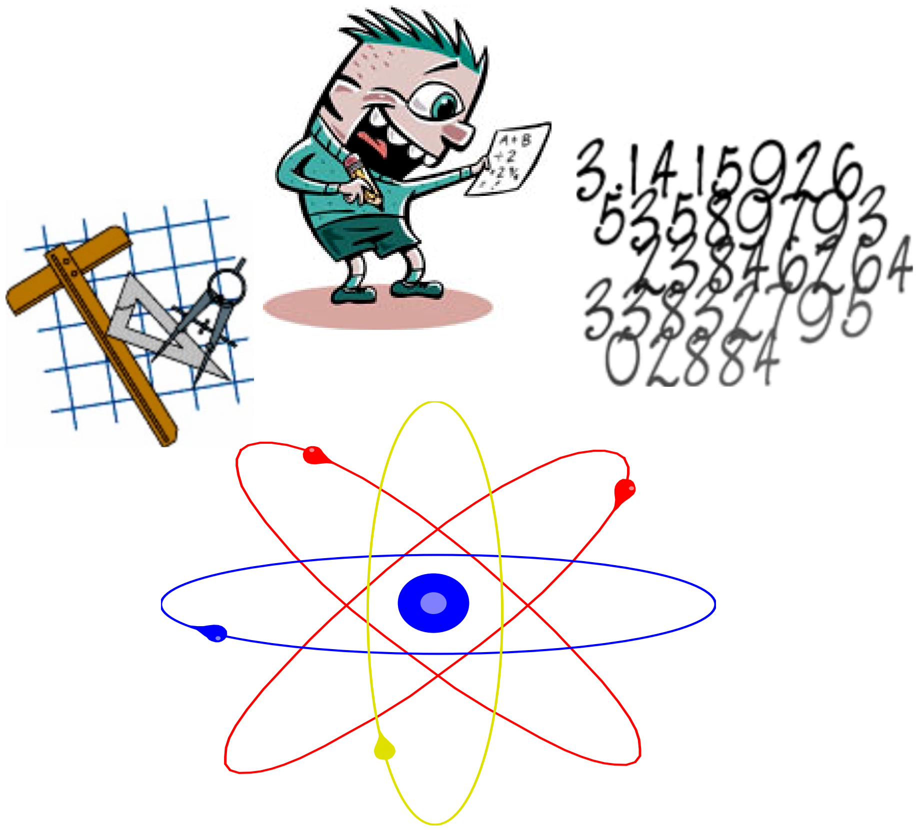
Script zum Propädeutikum Mathematik

wichtige Grundlagen:



© Berthold Halbmann

Stand: WiSe 2024/2025

Hinweis:

Das Skript ist eine wachsende Materialsammlung, aktuell in einer Entwurfsfassung.

Vorwort:

Mathematik steckt nahezu in jedem Studienfach, sei es in der Soziologie, der Psychologie, allgemein den Gesellschaftswissenschaften und natürlich auch in den Wirtschaftswissenschaften. Für Ihr gesamtes Studium benötigen Sie daher fundierte Kenntnisse in Mathematik. Aber keine Angst:

Mathe kann jede und jeder schaffen!

Die Mathematik, die Sie für Ihr Studium benötigen, ist nicht anspruchsvoller als in der Schule. Es ist nur eine größere Stofffülle und das Tempo deutlich höher als in der Schule.

Erinnern Sie sich noch an die Fernsehserie „Bob, der Baumeister“ und an die zweifelnde Frage, **„Schaffen wir das?“**, die dann im Chor mit einem zuversichtlichen **„Yo, wir schaffen das!“** („Yes, wie can!“) beantwortet wird? Genau mit dieser Zuversicht, sollten Sie der Mathematik begegnen.

„Yo, wir schaffen das!“

Naturgemäß sind die mathematischen Vorkenntnisse von Studienanfängerinnen und –Anfänger sehr unterschiedlich und vielfach liegen mehr oder weniger starke Lücken bei diesen Grundkenntnissen vor. Warum auch immer. Diese Lücken zu schließen und möglichst alle auf ein Niveau zu bringen, ist Ziel dieses Scriptes. Es soll Ihnen dabei helfen, die für ein erfolgreiches Studium wirtschaftswissenschaftlicher Studiengänge notwendigen mathematischen Grundkenntnisse aufzufrischen und Ihnen so einen erfolgreichen Start in ihr Studium zu ermöglichen. Aber nicht nur das, denn

> *Die Beschäftigung mit der Mathematik erzieht zu objektivem Denken, sie wehrt der unzulässigen Verallgemeinerung, sie bewirkt eine Präzision der Sprache.*
>
> Herbert Meschkowski (1909 – 1990)
> (deutscher Mathematiker)

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg beim Auffrischen Ihrer Grundkenntnisse! Denken Sie insbesondere bei meinen Lösungen bitte daran, dass immer mal wieder der Duckfrehlerteufel zuschlägt. Außerdem kann ich mich ja auch verrechnet haben! Für entsprechende Hinweise bedanke ich mich ebenso wie für weitere Anregungen, Lob und Tadel.

Meine Mailadresse: **Berthold.Halbmann@hs-bremen.de**

Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen,
alles andere ist Menschenwerk.

Leopold Kronecker
(deutscher Mathematiker 1823 -1891)

Inhalt

Kapitel 1: Mengenlehre

1.1 Definition einer Menge/Darstellungsweisen

Definition1.1: Menge

Eine Menge ist eine nach bestimmten Kriterien vorgenommene Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen.

Die Objekte a einer Menge A heißen Elemente der Menge und gehören zu einer Grundmenge G, beispielsweise G = die Menge aller Lego - Steine und A = die Menge der blauen Lego – Steine.

Schreibweise:

$a \in A$ bedeutet: das Element a gehört zur Menge A

$a \notin A$ bedeutet: das Element a gehört nicht zur Menge A

Für jedes Element a gilt entweder $a \in A$ oder $a \notin A$.

Darstellungsweisen:

Mengen kann man in

– beschreibender
– aufzählender
– graphischer (Venn-Diagramme[1])

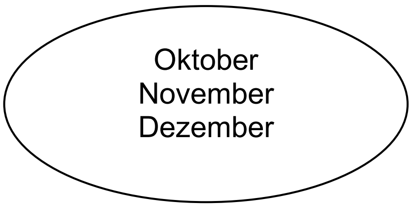
Form darstellen.

Beispiele:

(1) beschreibend: Die Menge M aller Monate des letzten Vierteljahres

aufzählend: $M = \{ \text{Okt.}, \text{Nov.}, \text{Dez.} \}$

graphisch: Venn-Diagramm



[1] John Venn (1834 – 1923), englischer Geistlicher und Logiker, Auch Euler-Diagramm oder einfach nur Mengendiagramm genannt.

(**2**) beschreibend: Die Menge B aller Ziffern im Zahlensystem

aufzählend: $B = \{\ 0, 1, 2, \ldots, 9\ \}$

graphisch: $0, 1, 2, \ldots, 9$

(3) beschreibend: Die Menge T aller ganzzahligen Teiler von 12

aufzählend: $T = \{\ 1, 2, 3, 4, 6, 12\ \}$

mathematische Schreibweise: $T = \{\ x \mid x \text{ ist Teiler von } 12\ \}$

Hinweis: $x \mid x$ wird gelesen als: **x für das gilt**

(4) beschreibend: Die Menge M aller natürlichen Zahlen größer 13

aufzählend: $M = \{\ 14, 15, \ldots\ \}$

mathematische Schreibweise: $M = \{\ n \in IN \mid n > 13\ \}$

(5) beschreibend: P ist ein Punkt auf dem Einheitskreis der reellen Zahlenebene

mathematische Schreibweise: $E = \{\ (x, y) \mid (x, y) \in IR^2 \text{ und } x^2 + y^2 = 1\ \}$

In der Wahrscheinlichkeitstheorie werden die Ergebnisse eines Zufallsexperiments als Mengen dargestellt und als **Ereignisse** bezeichnet. Ereignisse, die unmittelbar eintreten, heißen **Elementarereignisse**.

(6) Zufallsexperiment: Einmaliges Werfen eines „normalen“ Spielwürfels

beschreibend: Ereignis A: Eine gerade Zahl wird geworfen

aufzählend: $A = \{\ 2, 4, 6\ \}$

(7) Zufallsexperiment: Dreimaliges Werfen einer Münze mit den Seiten Wappen = W und Zahl = Z

beschreibend: Die Menge S aller Elementarereignisse beim Werfen der Münze

aufzählend: $S = \{\ www, wwz, wzw, zww, zzz, zzw, zwz, wzz\ \}$

Konventionen:

kein Element darf mehrfach in einer Mengenaufzählung auftreten, die Reihenfolge der Elemente in der Aufzählung ist beliebig.

1.2 Teilmenge/leere Menge/Potenzmenge

(1) Teilmenge:

Definition 1.21:

Eine Menge A heißt Teilmenge der Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

Schreibweise:

$A \subseteq B :\Leftrightarrow$ (für jedes a gilt: $a \in A \;\Rightarrow\; a \in B$)

(2) leere Menge:

Definition 1.22:

Eine Menge A heißt leere Menge, falls sie keine Elemente besitzt.

Schreibweise: $\{\ \}$ oder $\varnothing$

Satz 1.21:

Für jede Menge M gilt:	symbolisch
Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge:	$\varnothing \subseteq M$
Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst:	$M \subseteq M$

Beispiel: Bestimmen Sie alle Teilmengen der Menge $M = \{ a, b \}$

Lösung: Teilmengen von M sind: $M_1 = \{\ \}$ $M_2 = \{ a \}$

$M_3 = \{ b \}$ $M_4 = \{ a, b \}$

Die Teilmengen von M kann man als Objekte zu einer neuen Menge P(M) zusammenfassen. Die so entstehende neue Menge wird Potenzmenge genannt:

(3) Potenzmenge:

Definition 1.23:

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M heißt Potenzmenge von M. Abkürzung: P(M)

Beispiel: Bestimmen Sie die Potenzmenge der Menge $B = \{ 0, 1, 2 \}$.

Lösung: $P(B) = \{ \{\ \}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0;1\}, \{0;2\}, \{1;2\}, \{0;1;2\} \}$

Satz 1.22: Jede n-elementige Menge besitzt 2^n verschiedene Teilmengen.

Begründung:

Ein Element a gehört zur Menge A oder gehört nicht zur Menge A. Es gibt für jedes Element also immer 2 Möglichkeiten (gehört zur Menge oder gehört nicht zu Menge). Hat eine Menge zwei Elemente, gibt es für jedes dieser Elemente zwei Möglichkeiten, also insgesamt vier Möglichkeiten ($2 \cdot 2 = 2^2 = 4$). Bei drei Elementen hat man also 2 Möglichkeiten für das erste Element, 2 Möglichkeiten für das zweite Element und 2 Möglichkeiten für das dritte Element, also insgesamt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ usw.

(4) Mächtigkeit einer Menge:

Definition 1.24:

Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge heißt Mächtigkeit. Abkürzung: $|M|$

So hat z.B. die Potenzmenge P(B) der obigen 3-elementigen Menge B die Mächtigkeit $2^3 = 8$.

Die Potenzmenge der leeren Menge (0 Elemente) hat $2^0 = 1$ Element.

1.3 Durchschnitt und Vereinigung von Mengen

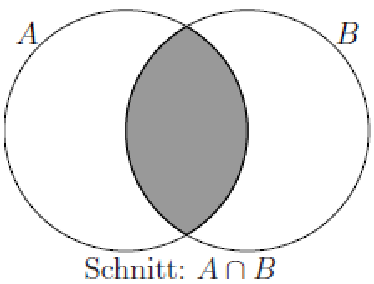
Definition 1.32:

Durchschnittsmenge :

Die Durchschnittsmenge (Schnittmenge) $A \cap B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.

<u>Schreibweise:</u> $A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ und } x \in B \,\}$

<u>graphisch:</u>



Schnitt: $A \cap B$

Beispiel: Gegeben seien die Mengen $A = \{3,4,6,7\}$, $B = \{3,5,6\}$ und $C = \{4,2,1\}$.
Bestimmen Sie die Schnittmengen $A \cap B$ und $B \cap C$

Lösung: $A \cap B = \{3;6\}$

$B \cap C = \{\,\}$

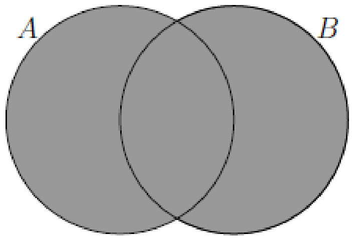
Definition 1.32:

Vereinigungsmenge:

Die Vereinigungsmenge $A \cup B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die entweder in A oder in B oder in beiden enthalten sind.

Schreibweise: $A \cup B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{ oder } x \in B \right\}$

graphisch:



Vereinigung: $A \cup B$

Beispiel: Gegeben seien die Mengen $A = \{3,4,6,7\}$ und $B = \{3,5,6\}$.
Bestimmen Sie die Vereinigungsmenge $A \cup B$.

Lösung: $A \cup B = \{3;4;5;6;7\}$

1.4 Disjunkte Mengen, Differenz- und Komplementärmengen

Definition 1.33:

disjunkte Mengen

Zwei Mengen, die kein gemeinsames Element besitzen, heißen disjunkt (elementfremd).

Schreibweise: A, B disjunkt $\Leftrightarrow A \cap B = \{ \ \}$

Beispiel: Zufallsexperiment: Einmaliges Werfen eines „normalen" Spielwürfels

Ereignis A: Eine gerade Zahl wird geworfen, $A = \{2,4,6\}$

Ereignis B: Eine ungerade Zahl wird geworfen, $B = \{1,3,5\}$

Dann ist $A \cap B = \{ \}$. A und B sind daher disjunkte Mengen.

Definition 1.34: Differenz- und Komplementärmenge

Differenzmenge:

Die Differenzmenge $B \setminus A$ („gelesen B ohne A“) zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu B aber nicht zu A gehören.

Schreibweise: $B \setminus A = \left\{ x \middle| x \in B \text{ und } x \notin A \right\}$

Komplementärmenge:

Ein Sonderfall der Differenzmenge ist die Komplementärmenge $\overline{A}$ (gelesen „A quer“).

Falls die Menge A eine Teilmenge von B ist, dann heißt die Differenzmenge **Komplementärmenge** von A bezüglich B. Sie besteht demnach aus allen Elementen, die zu B gehören, aber nicht zu A.

Sie wird auch **Restmenge** oder **Ergänzungsmenge** genannt, weil sie aus den fehlenden Elementen besteht, die man ergänzen muss, um die Menger B zu erhalten.
Salopp gesagt, besteht die Komplementärmenge $\overline{A}$ aus allen Elementen, die nicht zu A gehören.

Schreibweise: $\overline{A} = B \setminus A = \left\{ x \middle| x \in B \text{ und } x \notin A \right\}$ falls $A \subset B$

Es gilt dann $\mathbf{A \cup \overline{A} = B}$

und $\mathbf{A \cap \overline{A} = \varnothing}$

Beispiel: Gegeben seien die Mengen $A = \{1,2,3,5\}$, $B = \{3,5,6\}$ und $C = \{1,2,3,4,5,6\}$.

a) Alle Elemente, die in A, aber nicht in B liegen, bilden die Differenzmenge $A \setminus B$. Es ist demnach $A \setminus B = \{1;2\}$

Alle Elemente, die in B, aber nicht in A liegen, bilden die Differenzmenge $B \setminus A$. Es ist demnach $B \setminus A = \{6\}$

Wie man sieht, sind die verschiedenen Differenzmengen nicht gleich. Es ist daher

$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

d.h. das Kommutativgesetz gilt für Differenzmengen nicht!

b) A ist eine Teilmenge von C. Um die Menge C zu erhalten, muss die Menge A um die Menge $\{4;6\}$ ergänzt werden. Die Komplementärmenge $\overline{A}$ ergibt sich daher zu

$$\overline{A} = C \setminus A = \{4;6\}$$

1.5 Rechenregeln für Mengenoperationen

Für Ereignisse $A, B, C, \ldots$ gelten folgende Rechenregeln. Bei fehlenden Klammern ist die Durchschnitts- und Komplementärbildung vor der Vereinigungsbildung durchzuführen in Analogie zur „Punkt vor Strich“ – Regel beim Rechnen mit Buchstaben.

Kommutativgesetze: $A \cap B = B \cap A$ bzw. $A \cup B = B \cup A$

Distributivgesetze: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Assoziativgesetze: $A \cap (B \cap C) = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

$A \cup (B \cup C) = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

Transitivgesetz $A \subset B$ und $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

weitere Regeln: $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

und $A \cup B = B$

und $A \subset A \cup B$ und $B \subset A \cup B$

und $(A \cap B) \subset A$ und $(A \cap B) \subset B$

Ferner gelten die Regeln von de Morgan:

Regeln von de Morgan:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Ist ferner $A \subset B$ und $\overline{A}$ das Komplement bezüglich B, also $A \cup \overline{A} = B$, dann gilt

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

1.6 Mengen in der Wahrscheinlichkeitstheorie

Das „Rechnen“ (Operieren) mit Mengen wird Ihnen in der Wahrscheinlichkeitstheorie in Modulen zur Statistik wiederbegegnen. Mathematisch betrachtet sind Zufallsereignisse wie „6 Richtige im Lotto 6 aus 49“ Mengen. Es gelten daher die für die Mengenlehre gültigen Mengenoperationen. Man muss allerdings die Sprechweise der Mengenlehre in die Ereignissprache übersetzen.

Gegeben sind im Folgenden zwei Ereignisse A und B, die durch Mengenverknüpfung (Schnitt- oder Vereinigungsmenge) miteinander verbunden werden.

Nachstehende Tabelle zeigt einen Überblick über die wichtigsten Begriffe und Verknüpfungen:

Ereignissprache		Mengensprache
$\mathbf{A \cap B}$	ist das Ereignis, das genau dann eintritt, wenn das Ereignis A ***und gleichzeitig*** das Ereignis B eintritt, wenn also sowohl A als auch B eintritt.	$\mathbf{A \cap B}$ = A geschnitten mit B
$\mathbf{A \cup B}$	ist das Ereignis, das genau dann eintritt, wenn das Ereignis A ***oder*** das Ereignis B ***oder beide*** Ereignisse eintreten, wenn also mindestens eines der beiden eintritt.	$\mathbf{A \cup B}$ = A vereinigt mit B
$\mathbf{\Omega}$	ist die Menge aller Elementarereignisse und wird als das ***sichere*** Ereignis bezeichnet. $\mathbf{\Omega}$ ist das Ereignis, das stets eintritt.	$\mathbf{\Omega}$ = die gesamte Menge
$\varnothing$ =	ist das ***unmögliche*** Ereignis, also das Ereignis, das nie eintreten kann.	$\varnothing$ = die leere Menge
$\mathbf{\bar{A}}$	ist das ***Gegenereignis*** zu A und tritt genau dann ein, wenn A ***nicht*** eintritt. *es gilt:* $\mathbf{A \cup \bar{A}} = \Omega$ $\mathbf{A \cap \bar{A}} = \varnothing$	$\mathbf{\bar{A}}$ = Komplement von A
$\mathbf{A \setminus B}$	gelesen ‚*A ohne B*' ist das Ereignis, das genau dann eintritt, wenn das Ereignis A eintritt aber nicht das Ereignis B.	$\mathbf{A \setminus B}$ A ohne B, Differenzmenge von A und B.
$\mathbf{A \subset B}$	Ereignis A zieht Ereignis B nach sich, d.h. mit Ereignis A tritt auch stets das Ereignis B ein.	$\mathbf{A \subset B}$ A ist Teilmenge (Untermenge) von B.

1.7 Zahlenmengen

- Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$,

  $\mathrm{IN} = \{ 1,2,3, \ldots \}$

- Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

  $\mathbb{Z} = \{ \ldots -2,-1, 0,1,2,3,\ldots \}$

- Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (Bruchzahlen)

  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

- Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (Punkte auf der Zahlengeraden)

- Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ (Punkte der Ebene)

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

1.8 spezielle Mengen reeller Zahlen

1.81 Intervalle:

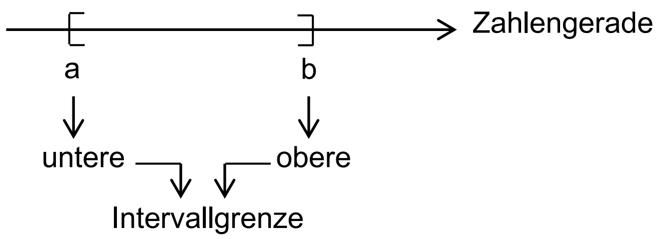
Definition 1.61:

Ein **Intervall** ist eine spezielle Teilmenge der reellen Zahlen IR.

Algebraisch: Für $a < b$ nennt man die Zahlenmenge $I = [a;b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$ ein **abgeschlossenes** Intervall von a bis b.

Geometrisch: Alle Zahlen, die auf der Zahlengeraden zu der Strecke von a nach b gehören, b

anschaulich:

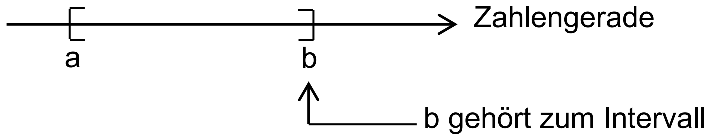


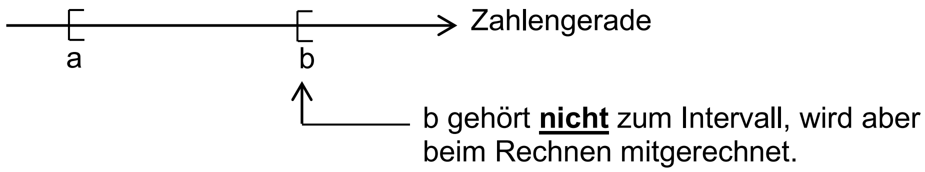
Will man die obere Intervallgrenze nicht mit in die Zahlenmenge nehmen, schreibt man $\left[\, a\,;b \,\right[$ oder $\left[\, a\,;b \,\right)$. Will man dagegen die untere Intervallgrenze nicht mit in die Zahlenmenge nehmen, schreibt man $\left]\, a\,;b \,\right]$ oder $\left(\, a\,;b \,\right]$.

Die Zahlenmenge

- $I = \left[\, a\,;\, b \,\right] = \left\{ x \mid a \le x \le b \right\}$ heißt **abgeschlossenes** Intervall von a bis b
- $I = \left[\, a\,;\, b \,\right[= \left\{ x \mid a \le x < b \right\}$ heißt **rechtsoffenes** Intervall von a bis unter b.
- $I = \left]\, a\,;\, b \,\right] = \left\{ x \mid a < x \le b \right\}$ heißt **linksoffenes** Intervall von über a bis b
- $I = \left]\, a\,;\, b \,\right[= \left\{ x \mid a < x < b \right\}$ heißt **offenes** Intervall von über a bis unter b

anschaulich:





Intervalllänge Δx_i: $\Delta x_i = b - a$ gelesen: „delta x_i" ,

Intervallmitte m_i: $m_i = \frac{1}{2} \cdot (a + b)$

Beispiel: Das Intervall $[3\,;8]$ hat die Intervalllänge $\Delta x_i = b - a = 8 - 3 = 5$ und die Intervallmitte $m_i = \frac{1}{2} \cdot (a + b) = \frac{1}{2} \cdot (3 + 8) = 5{,}5$

Intervallschachtelung:

Eine Intervallschachtelung ist eine unendliche Folge von Intervallen, für die gilt:

- Jedes Intervall umfasst das folgende.
- Die Intervalllängen werden so klein, wie man will.

1.82 Produktmenge

Definition 1.82:

Die Produktmenge $A \times B$ (gelesen "A Kreuz B") der beiden Mengen A und B besteht aus allen geordneten Paaren (a, b)

Das Element $a \in A$ heißt 1. Koordinate
Das Element $b \in B$ heißt 2. Koordinate

Schreibweise:

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \text{ und } b \in B \}$$

Anwendung: kartesisches Koordinatensystem

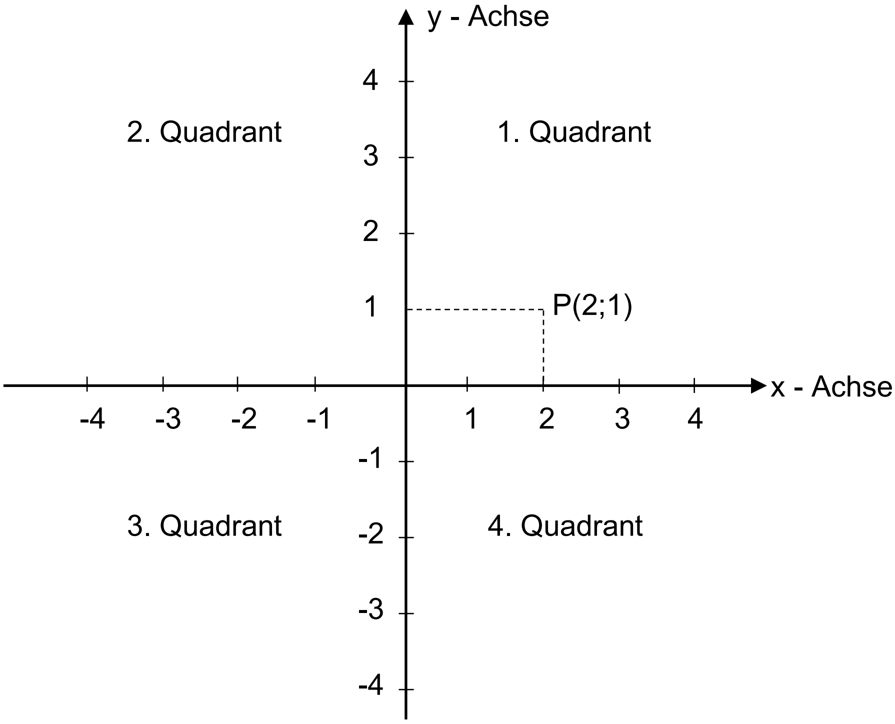
$$IR \times IR = IR^2 = \{ (x,y) \mid x \in IR \text{ und } y \in IR \}$$

waagrechte Achse: x-Achse (Abszisse)

senkrechte Achse: y-Achse (Ordinate)

Das Zahlenpaar $(x, y) \in IR^2$ entspricht genau einem Punkt der Ebene. In nachstehender Skizze ist x = 2 und y = 1.

graphisch:



Geschichtliches:

Benannt wurde das kartesische Koordinatensystem nach dem französischen Philosophen (und Mathematiker) *René DESCARTES* (1596-1650), der in seinem 1637 erschienenen berühmten »*Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*«[2], eine neue mathematische Methode zur Lösung geometrischer Probleme vorstellt. Dazu führt DESCARTES einen Bezugspunkt O (Koordinatenursprung) und zwei senkrecht aufeinander stehende Koordinatenachsen ein und ordnet eineindeutig jedem Punkt der Ebene Zahlen zu: Das (cartesische) Koordinatensystem war geboren!

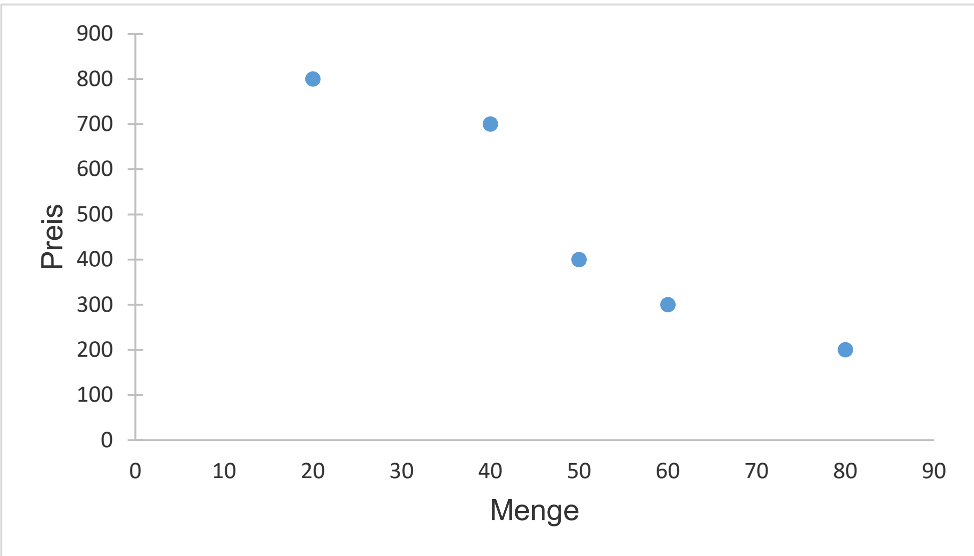
Als Philosoph prägte er den Satz: „*Cogito ergo sum*" (= ich denke, also bin ich).

Beispiel:

Ein Unternehmen notierte die Preise p in Abhängigkeit der zu diesem Preis verkauften Mengen x einer Ware A:

Menge	20	40	50	60	80
Preis	800	700	400	300	200

Nachstehende Abbildung zeigt die ermittelten Preise und Mengen als Punkte im (kartesischen) Koordinatensystem:



2 »Abhandlung über die Methode, seine Vernunft gut (richtig) zu führen und die Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen«

Kapitel 2: Grundlagen der Arithmetik

2.1 Grundrechenarten/Begriffe

Es gibt zwei Grundrechenarten:

- **Addition**
- **Multiplikatio**n

Summe: Eine Summe ist das Ergebnis der Addition zweier Zahlen a und b,

in Zeichen: **a + b**

Die Buchstaben a , b heißen **Summanden.**

Produkt: Ein Produkt ist das Ergebnis der Multiplikation zweier Zahlen a und b

in Zeichen: **a · b**

Die Buchstaben a , b heißen **Faktoren**.

Was ist jetzt aber nun Subtraktion bzw. Division?

Subtraktion ist mathematisch die Addition der Gegenzahl.

Gegenzahlen sind Zahlen, die auf der Zahlengeraden auf verschiedenen Seiten vom Nullpunkt liegen, aber von diesem gleichweit entfernt sind, wie - 4 und + 4,

Beispiel: $5-3=5+(-3)$

Division ist mathematisch die Multiplikation mit dem Kehrwert der Zahl.

Werden Zähler und Nenner eines Bruches vertauscht, spricht man vom Kehrwert.

Beispiel: $5:3=5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)$

Hinweis: Sich daran zu erinnern, dass eine Division durch eine Zahl nichts anderes ist als die Multiplikation mit dem Kehrwert dieser Zahl, vereinfacht vieles, z.B. das Lösen von Gleichungen.

Beispiel: Zu lösen ist die Gleichung $\frac{3}{7}x=5$

Lösung: Durch den Faktor vor x zu dividieren, wie man es gelernt hat, führt unweigerlich auf das Problem

$x=\frac{5}{\frac{3}{7}}$ ausrechnen zu müssen. Multipliziert man dagegen einfach mit

dem Kehrwert von $\frac{3}{7}$, also mit $\frac{7}{3}$, ergibt sich x zu $x=5\cdot\frac{7}{3}=\frac{35}{3}$

Definition 2.1: Terme T

Jede Zahl oder Variable und jede <u>sinnvolle</u> Verknüpfung von Zahlen und Variablen mit Symbolen heißt Term.

Terme sind also Rechenausdrücke wie:

- Zahlen, z.B.: $0\,;-2\,;\frac{1}{3}\,;\sqrt{2}\,;\ldots$
- Variable, z.B.: $x\,;y\,;z\,;a\,;b\,;\ldots.$
- Durch Rechenzeichen verbundene Zahlen und Variable, z.B. $2\cdot x\;;\;4xy^3\,;z+5\;;\;a^2+b^2$

Koeffizienten:

Die Zahlfaktoren vor den Variablen nennt man **Koeffizienten**. Der Term $2x^2$ hat den Koeffizienten 2, der Term $4xy^3$ hat den Koeffizienten 4.

gleichartige Terme:

Terme, die sich nur in den Koeffizienten (Zahlfaktoren) unterscheiden, heißen **gleichartig**. So sind die Terme $2x^2$ und $13x^2$ gleichartige Terme, da sie sich nur in den Koeffizienten 2 und 13 unterscheiden. Die Terme $2x^2$ und $13y^2$ sind dagegen **nicht** gleichartig.

wertgleiche Terme:

Zwei Terme heißen wertgleich, wenn sich bei jeder beliebigen Einsetzung übereinstimmende Werte ergeben

Termumformung:

Bei einer Termumformung wird ein Term in einen einfacheren, aber wertgleichen Term umgeformt. Deshalb verbindet man Terme durch ein Gleichheitszeichen.

Addition/Subtraktion von Termen:

Gleichartige Terme werden addiert (subtrahiert), indem man deren Koeffizienten addiert (subtrahiert). **Nicht gleichartige Terme dürfen nicht addiert (subtrahiert) werden!**

Beispiele:

(1) Der Term $T = 4\cdot x^2+13\cdot x\cdot y^3-x^2+7\cdot x\cdot y^3$ lässt sich in folgenden einfacheren Term umformen.

$$\begin{aligned} T &= 4\cdot x^2+13\cdot x\cdot y^3-x^2+7\cdot x\cdot y^3\\ &= 4\cdot x^2-x^2+13\cdot x\cdot y^3+7\cdot x\cdot y^3\\ &= 4\cdot x^2-1\cdot x^2+13\cdot x\cdot y^3+7\cdot x\cdot y^3\\ &= 3\cdot x^2+20\cdot x\cdot y^3 \end{aligned}$$

(2) Der Term $T = 4\cdot x^2+13\cdot x^3\cdot y-x+7\cdot x\cdot y^3$ lässt sich nicht in einen anderen Term umformen, weil es keine gleichartigen Terme gibt.

Wie der Term zu seinem Namen kommt:

Die letzte Rechenart, die man bei einem Term ausführen muss, gibt dem Term seinen Namen.

Ein Term heißt	
Summe,	wenn man im letzten Rechenschritt **addieren** muss
Produkt	wenn man im letzten Rechenschritt **multiplizieren** muss
Potenz	wenn man im letzten Rechenschritt **potenzieren** muss
Differenz	wenn man im letzten Rechenschritt **subtrahieren** muss
Quotient	wenn man im letzten Rechenschritt **dividieren** muss

Rechenhierarchie:

Grundsätzlich gilt folgende Rechenhierarchie:

Klammer- vor Potenz- vor Punkt- vor Strichrechnung.

Beispiele:

(1) $(8+1)^2:(7-4)+(4\cdot 2^3)=9^2:3+32=81:3+32=27+32=59$

(2) $(5+4\cdot 3)\cdot(3-2\cdot 4)+(12-3\cdot 5)=17\cdot(-5)+(-3)=-88$

(3) $7\cdot(5-2)^2+4\cdot 2^3+5+11\cdot 4=7\cdot 3^2+4\cdot 2^3+5+44=7\cdot 9+4\cdot 8+5+44=144$

Beispiele zur Namensgebung von Termen:

Term	**Name**	**Begründung**
$T_1=2\cdot(x+3)$	Produkt	man muss zuletzt multiplizieren, weil Klammer- vor Punktrechnung.
$T_2=2\cdot x+3$	Summe	man muss zuletzt addieren, weil Punkt- vor Strichrechnung.
$T_3=(2\cdot x+3)^2$	Potenz	man muss zuletzt potenzieren, weil Klammer- vor Potenzrechnung.
$T_4=2:(x+3)$	Quotient	man muss zuletzt dividieren, weil Klammer- vor Strichrechnung.
$T_5=(2:x)+3$	Summe	man muss zuletzt addieren, weil Klammer- vor Strichrechnung

Wie Sie an diesen Beispielen sehen, machen die Klammern den Unterschied.

2.2 Rechengesetze:

Seien a, b, c beliebige reelle Zahlen. Dann gelten folgende Rechengesetze in IR:

Kommutativgesetz (KG):

- der Addition: $a+b = b+a$
- der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$

!! Achtung !! $a-b$ ist nicht gleich $b-a$, sondern $a-b = -b+a$, denn $a-b=a+(-b)$.

Beispiele:

(1) $x+y-3+2\cdot x+5 = x+2\cdot x+5-3+y = 3x+2+y$

(2) $4\cdot x\cdot b\cdot a\cdot x\cdot b\cdot 7 = 4\cdot 7\cdot x\cdot x\cdot b\cdot b\cdot a = 28\cdot x^2\cdot b^2\cdot a$

(3) $3x^2y7 = 3\cdot 7x^2y = 21x^2y$

Hinweis: Wenn keine Verwechslungen möglich sind, kann das Multiplikationszeichen "•" weggelassen werden. In Beispiel 3 muss man aber nach Anwendung des Kommutativgesetzes unterscheiden können, ob es sich um die Zahl 37 oder das Produkt $3\cdot 7$ handelt. Es ist also notwendig, zwischen der Zahl 3 und der Zahl 7 das Multiplikationszeichen zu setzen.

Distributivgesetz 1 (DG1): $a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$

$a\cdot(b-c) = a\cdot b-a\cdot c$

Multipliziert man eine Summe (Differenz) mit einem Faktor, dann muss man jeden Summanden mit diesem Faktor multiplizieren und die Ergebnisse addieren (subtrahieren).

Distributivgesetz 2 : $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$

Zwei Klammerausdrücke werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert und die Ergebnisse addiert bzw. subtrahiert.

Beispiele zu DG 1:

(1) $3(2x^2+4) = 3\cdot 2x^2+3\cdot 4 = 6x^2+12$

(2) $-2(4-7ab) = -2\cdot 4+(-2)\cdot(-7ab) = -8+14ab$

(3) $-a(3b-a+4b) = -a\cdot 3b+(-a)\cdot(-a)-a4b = -3ab+a^2-4ab = a^2-7ab$

Beispiele zu DG 2:

(1) $(2a+3b)(4a+5) = 2a\cdot 4a+2a\cdot 5+3b\cdot 4a+3b\cdot 5 = 8a^2+10a+12ab+15b$

(2) $(3x-2)(2y-4) = 3x2y+3x(-4)+(-2)\cdot 2y+(-2)\cdot(-4) = 6xy-12x-4y+8$

(3) $(a+b)(a-b) = a\cdot a-a\cdot b+b\cdot a-b\cdot b = a^2-b^2$

Die Distributivgesetze sind mit die wichtigsten Rechengesetzte. Sie verbinden die Rechenoperationen Addition und Multiplikation und sind die Rechengesetzte für das Rechnen mit Klammern. Die rechte Seite der Gleichung $a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$ gibt die Regel für das Ausklammern von Faktoren (= **faktorisieren**) an.

wichtige Merkregeln:

(1) Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden durch diese Zahl dividiert, denn Division bedeutet Multiplikation mit dem Kehrwert (siehe Distributivgesetz 1).

Beispiele:

(1) $(a+b+c):d = a:d + b:d + c:d$

(2) $\dfrac{4x^3+16x-20}{x} = \dfrac{4x^3}{x} + \dfrac{16x}{x} - \dfrac{20}{x} = 4x^2 + 16 - \dfrac{20}{x}$

(2) Ein Minuszeichen vor der Klammer ändert die Vorzeichen der Glieder in der Klammer, wenn man die Klammer auflöst, denn das Minuszeichen vor der Klammer bedeutet eine Multiplikation der Klammer mit -1 (siehe Distributivgesetz 1).

Beispiele:

(1) $-(-a) = (-1)\cdot(-a) = a$

(2) $-(a+b) = (-1)\cdot(a+b) = (-1)\cdot a + (-1)\cdot b = -a-b$

(3) $-(a-b) = (-1)\cdot(a-b) = (-1)\cdot a + (-1)\cdot(-b) = -a+b$

(3) Klammern in Klammern:

Treten mehrere Klammern ineinander geschachtelt auf, beginnt man bei der innersten Klammer mit der Auflösung und arbeitet sich nach außen vor.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& 2(x-4(y-x+3\underbrace{(x-y)}_{3x-3y}+5)+7x) \\
=\ & 2(x-4\underbrace{(y-x+3x-3y+5)}_{2x-2y+5}+7x) \\
=\ & 2(x\underbrace{-4(2x-2y+5)}_{-8x+8y-20}+7x) \\
=\ & 2\underbrace{(x-8x+8y-20+7x)}_{8y-20} \\
=\ & 2(8y-20) \\
=\ & 16y-40
\end{aligned}
$$

Faktorisieren (Ausklammern):

Faktorisieren ist die Verwandlung von Summen in Produkte

$$\mathbf{a \cdot b + a \cdot c \leftarrow \text{Summe}}$$

$$\mathbf{= \quad a \cdot (b + c) \leftarrow \text{Produkt}}$$

Merke: **Wenn ein Faktor in jedem Glied einer Summe auftritt, so kann dieser Faktor ausgeklammert werden.**

Beispiele:

(1) $3x + 11x = x \cdot (3 + 11) = 14\,x$

(2) $4x + 12b - 20c = 4(x + 3b - 5c)$

Zur Probe multipliziert man die Klammer wieder aus. Es muss dann der Term entstehen, von dem man ausgegangen ist. Wie man am Beispiel 1 sieht, steckt hinter der Rechenregel zur Zusammenfassung von Termen das Distributivgesetz.

weitere Beispiele:

(3) $4x^3 + 8x^2 - 12x = 4x(x^2 + 2x - 3)$

(4) $x^2 - x = x^2 - 1 \cdot x = x(x - 1)$

(5) $10xu + 6xw - 15yu - 9yw = 2x(5u + w) - 3y(5u + 3w) = (5u + 3w)(2x - 3y)$

Oftmals kann man durch Ausklammern komplizierte Brüche vereinfachen.

(8) $\dfrac{16x + 32}{4x + 8} = \dfrac{16(x + 2)}{4(x + 2)} = \dfrac{16}{4} = 4$

(9) $\dfrac{3au - 4av + 6bu - 8bv}{av - 3au + 2bv - 6bu} = \dfrac{3u - 4v}{v - 3u}$

Faktorisieren verwandelt Summen in Produkte. Die Verwandlung von Summen in Produkte ist im Zusammenhang des Lösens von Gleichungen bedeutsam, denn es gilt der

Satz vom Nullprodukt:

Ein Produkt $a \cdot b$ ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

Beispiel: $(x - 3)(x + 4)(x - 1) = 0$

Lösung: Der erste Faktor (x - 3) ist genau dann Null, wenn x = 3 ist, der zweite Faktor (x + 4) ist Null, wenn x = - 4 ist und der dritte Faktor (x - 1) ist dann Null, wenn x = 1 ist. Wenn es beim Lösen einer Gleichung gelingt, eine Summe in ein Produkt zu verwandeln, ist daher die Lösung ohne großen Rechenaufwand bestimmbar.

Auch mit Hilfe der **binomischen Formeln** lassen sich Summen in Produkte verwandeln.

Binomische Formeln:

1. Binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Binomische Formel: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beispiele:

(1) $(\underbrace{4x}_{a} + \underbrace{3z}_{b}) = \underbrace{(4x)^2}_{a^2} + \underbrace{2\cdot(4x\cdot 3z)}_{2ab} + \underbrace{(3z)^2}_{b^2} = 16x^2 + 24xz + 9z^2$

(2) $(\underbrace{8x}_{a} - \underbrace{2}_{b})^2 = \underbrace{(8x)^2}_{a^2} - \underbrace{2\cdot(8x\cdot 2)}_{2ab} + \underbrace{(2)^2}_{b^2} = 62x^2 - 32x + 4$

(3) $(\underbrace{2k}_{a} + \underbrace{5}_{b})(\underbrace{2k}_{a} - \underbrace{5}_{b}) = \underbrace{4k^2}_{a^2} - \underbrace{25}_{b^2}$

Erkennen binomischer Formeln:

Beispiel 1: Ist der Term $16x^2 + 40x + 25$ eine binomische Formel?

Wenn $16x^2 + 40x + 25$ eine binomische Formel ist, dann kann es nur die 1. binomische Formel sein. Dann ist $16x^2 = a^2$ also $a = 4x$ und $25 = b^2$ also $b = 5$. Jetzt muss **unbedingt** die Probe gemacht werden, ob das doppelte Produkt von a und b, also $2ab$ gleich $40x$ ist. Es ist $2\cdot\underbrace{4x}_{a}\cdot\underbrace{5}_{b} = 40x$. Damit ist der Term eine binomische Formel und es gilt:

$$16x^2 + 40x + 25 = (4x+5)^2$$

Beispiel 2: Ist $4x^2 - 14x + 9$ eine binomische Formel?

Wenn $4x^2 - 14x + 9$ eine binomische Formel ist, dann kann es nur die 2. binomische Formel sein. Dann ist $4x^2 = a^2$ also $a = 2x$ und $9 = b^2$ also $b = 3$.

Probe: $\mathbf{2ab = 14x}$? Es ist $2\cdot 2x\cdot 3 = 12x \neq 14x$. Damit ist der Term **keine** binomische Formel.

Beispiel 3: Löse die Gleichung $4x^3 + 4x^2 - 16x = 0$

Lösung: $4x^3 - 16x^2 - 16x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4x - 4) \Leftrightarrow 4x\,\underbrace{(x-2)^2}_{\text{2. bin. Formel}} = 0$.

Die Lösungen sind daher $x = 0$ oder $x = 2$

Auch zum Kopfrechnen eignen sich die binomischen Formeln:

Beispiele:

(1) $49^2 = (50-1)^2 = 50^2 - 2\cdot 50\cdot 1 + 1^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$
(2) $71\cdot 69 = (70+1)\cdot(70-1) = 70^2 - 1^2 = 4999$
(3) $75^2 = (70+5)^2 = 70^2 + 2\cdot 70\cdot 5 + 5^2 = 4900 + 700 + 25 = 5625$

Assoziativgesetz (AG)

- der Addition: $a+b+c = (a+b)+c = a+(b+c)=(a+b+c)$
- der Multiplikation: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b \cdot c\ )$

In einer Summe/Produkt darf man Klammern beliebig setzen (oder auch weglassen). Die Reihenfolge der Zusammenfassung spielt keine Rolle.

Beispiele:

(1) $(a+5)+(x+7)+a = a+(5+x)+(7+a) = a+5+x+7+a = a+a+x+5+7 = 2a+x+12$

(2) $(ab)(5x)(8ab)(2x) = 5 \cdot 8 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot x \cdot x = 80a^2b^2x^2$

2.3 Bruchrechnen:

Definition 2.31: Bruch

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ ist der Quotient zweier natürlicher Zahlen. Die natürliche Zahl a heißt **Zähler**, die natürliche Zahl b **Nenner** des Bruches.

Der Nenner gibt an, in wie viele Teile ein Ganzes geteilt werden soll. Der Zähler gibt an, wie viele Teile es davon gibt.

Beispiel 1: $\frac{2 \leftarrow \text{ Zähler}}{3 \leftarrow \text{Nenner}} \leftarrow \text{Bruchstrich}$

Ein ganzes wurde in drei Teile geteilt und davon gibt es zwei Stück.

Beispiel 2: $\frac{2}{3}$ der Fläche eines 3600 m^2 großen Firmenparkplatzes ist für Kunden reserviert. Wie groß ist die für Kunden reservierte Fläche?

Lösung: $(3600\,m^2 : 3) \cdot 2 = 2400\,m^2$. $\frac{2}{3}$ von 3600 sind demnach 2400. Man kann die Reihenfolge der Rechnung auch umkehren, d.h. zuerst multiplizieren und dann dividieren:

$(3600\,m^2 \cdot 2) : 3 = 2400\,m^2$. Anders geschrieben: $\frac{2}{3} \cdot 3600$.

Die Formulierung „$\frac{2}{3}$ von ...“ bedeutet demnach $\frac{2}{3}$ mal...“.

Achtung: NNN = Nenner niemals Null !! Der Nenner eines Bruches darf niemals Null sein

Es gilt: $\frac{a}{0}$ ist nicht definiert, aber $\frac{0}{a} = 0$

Warum ist eigentlich $\frac{a}{0}$ nicht definiert?

Erinnern Sie sich an die Division. Bekanntlich ist $6:3=2$, weil $2\cdot 3=6$ ist. Probieren wir es mit der Zahl Null. Was könnte $6:0$ sein? Angenommen, $6:0=0$, dann müsste aber $0\cdot 0=6$ sein. Versuchen wir es mit $6:0=6$, dann müsste aber $6\cdot 0=6$ sein. Wie zu sehen ist, würde das Zulassen der Division durch Null die Multiplikation außer Kraft setzen, was sicherlich nicht sinnvoll wäre.

Bezeichnungen:

echter Bruch: wenn der Zähler kleiner ist als der Nenner. Beispiel: $\frac{5}{7}$

unechter Bruch: wenn der Zähler größer ist als der Nenner. Beispiel: $\frac{8}{7}$

Scheinbrüche: wenn im Nenner die Zahl „ 1 „ steht. Beispiel: $\frac{13}{1}$

Hinweis: Jede ganze Zahl lässt sich als Bruch darstellen, indem man sie durch „ 1 „ dividiert.

Vorzeichen:

Ein Minuszeichen kann im Zähler, im Nenner oder vor dem gesamten Bruch stehen.

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$$

Kehrwert eines Bruches: Vertauschen von Zähler und Nenner

Beispiele:

(1) Der Kehrwert von $\frac{a}{b}$ ist $\frac{b}{a}$

(2) Der Kehrwert von $\frac{1}{b}$ ist $\frac{b}{1}=b$

Erweitern und Kürzen von Brüchen:

Ein Bruch wird **erweitert**, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl ungleich Null multipliziert

Ein Bruch wird **gekürzt**, indem man Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl ungleich Null dividiert.

Erweitern: $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$ für $b\neq 0;\ c\neq 0$

Kürzen: $\frac{a}{b}=\frac{a:d}{b:d}$ für $b\neq 0;\ d\neq 0$

Achtung:

Aus Summen und Differenzen darf man nicht kürzen

Man darf nur gemeinsame Faktoren von Zähler und Nenner kürzen. Stehen im Zähler und Nenner Summen, darf nur gekürzt werden, wenn man gemeinsame Faktoren ausklammern kann, durch die dann gekürzt wird.

$$\frac{ab+ac}{ad+ae}=\frac{\cancel{a}\cdot(b+c)}{\cancel{a}\cdot(d+e)}=\frac{b+c}{d+e}$$

Lassen sich die Summen nicht in Produkte verwandeln, darf nicht gekürzt werden!

Oftmals kann man durch Ausklammern komplizierte Brüche vereinfachen.

(a) $\frac{16x+32}{4x+8}=\frac{16(x+2)}{4(x+2)}=\frac{16}{4}=4$

(b) $\frac{3au-4av+6bu-8bv}{av-3au+2bv-6bu} = \frac{3u-4v}{v-3u}$

gleichnamige Brüche:

Zwei Brüche heißen gleichnamig, wenn sie den gleichen **Nenner** besitzen.

gleichnamig: $\frac{3x+1}{2ab}$ und $\frac{4x-7y}{2ab}$ $\qquad$ $\frac{2}{x^2-1}$ und $\frac{7x-7}{(x+1)(x-1)}$

denn $(x+1)(x-1) = x^2-1$ (binomische Formel)

nicht gleichnamig: $\frac{3x+1}{2a}$ und $\frac{3x+1}{2ab}$ $\qquad$ $\frac{2}{x^2+1}$ und $\frac{7x-7}{(x+1)(x-1)}$

denn $(x+1)(x-1) \neq x^2-1$

Addition/Subtraktion von Brüchen:

(1) gleichnamig: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ (gemeinsamer Nenner $b \neq 0$)

Gleichnamige Brüche werden addiert (subtrahiert), in dem man die Zähler addiert (subtrahiert) und das Ergebnis durch den gemeinsamen Nenner dividiert.

Es dürfen nur gleichnamige Brüche addiert werden!

(2) ungleichnamig: durch Erweitern gleichnamig machen!

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d} \quad \text{(gemeinsamer Nenner } b \cdot d \neq 0)$$

Sind die Nenner der Brüche verschieden, müssen sie vor der Addition (Subtraktion) durch Erweitern gleichnamig gemacht werden. Als gemeinsamer Nenner (Hauptnenner) wählt man das Produkt der einzelnen Nenner.

Beispiele:

(1) $\frac{4}{9} + \frac{7}{9} = \frac{11}{9}$

(2) $\frac{5}{3} + \frac{7}{9} = \frac{5}{5} \cdot \frac{9}{9} + \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{3} = \frac{5 \cdot 9 + 7 \cdot 3}{3 \cdot 9} = \frac{66}{27} = \frac{22}{9}$

(3) $\frac{4}{5} + \frac{7}{6} = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{6} + \frac{7}{6} \cdot \frac{5}{5} = \frac{4 \cdot 6 + 7 \cdot 5}{5 \cdot 6} = \frac{59}{30}$

(4) $\frac{4}{x+1} + \frac{7}{x-1} = \frac{4 \cdot (x-1) + 7 \cdot (x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{11x+13}{x^2-1}$

Multiplikation von Brüchen: (Zähler mal Zähler durch Nenner mal Nenner)

Brüche werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Beispiele:

(1) $\frac{4}{9} \cdot \frac{7}{11} = \frac{28}{99}$

(2) $\frac{(x-1)}{(x+2)} \cdot \frac{(x-1)}{(x-2)} = \frac{(x-1) \cdot (x-1)}{(x+2) \cdot (x-2)} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-4}$

Division von Brüchen:

Zwei Brüche werden dividiert, in dem man den **oberen** Bruch mit dem Kehrwert des **unteren** Bruches multipliziert.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Beispiele:

(1) $\frac{4}{9}:\frac{7}{11} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{7}{11}} = \frac{4}{9}\cdot\frac{11}{7} = \frac{44}{63}$

(2) $\frac{(x-1)}{(x+2)}:\frac{(x+2)}{(x-1)} = \frac{\frac{(x-1)}{(x+2)}}{\frac{(x+2)}{(x-1)}} = \frac{(x-1)}{(x+2)}\cdot\frac{(x-1)}{(x+2)} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+4x+4}$

Sonderfälle:

(1) Ein **Bruch** wird **durch** eine **Zahl** dividiert, in dem man seinen Nenner mit der Zahl multipliziert.

$$\frac{a}{b}:c = \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a}{b\cdot c}$$

(2) Eine **Zahl** wird **durch** einen **Bruch** dividiert, in dem man die Zahl mit dem Nenner des Bruches multipliziert und den Zähler des Bruches zum Nenner macht.

$$a:\frac{b}{c} = \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{1}\cdot\frac{c}{b} = \frac{a\cdot c}{b}$$

Beispiele:

(1) $\frac{1}{3}:7 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{1}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{21}$

(2) $7:\frac{1}{3} = \frac{\frac{7}{1}}{\frac{1}{3}} = \frac{7}{1}\cdot\frac{3}{1} = \frac{21}{1} = 21$

Grund- und Definitionsmenge von Bruchtermen:

Grundmenge G:

Treten im Zähler und Nenner eines Bruchterms Variable wie a, b, x, y usw. auf, so wird als Grundmenge G des Bruches die Menge der Zahlen bezeichnet, die zum Einsetzen in den Bruch vorgesehen sind, z.B. $G = \mathbb{N}$ oder $G = \mathbb{R}$.

Definitionsmenge D:

Da eine Division durch Null nicht definiert ist, muss dies beim Einsetzen von Zahlen für die Variable berücksichtigt werden.

Die **Definitionsmenge D** eines Bruchterms besteht aus allen Elementen der Grundmenge, die man einsetzen darf, ohne dass der Nenner zu Null wird.

Beachten Sie den Unterschied zwischen können und dürfen. Sie können bei Rot über die Ampel fahren, aber Sie dürfen nicht!

Beispiel:

Gegeben ist der Bruchterm $\frac{4}{x-1{,}5}$. Für die Grundmenge $G = \mathbb{N}$ ist der Term für alle natürlichen Zahlen definiert, da es keine natürliche Zahl gibt, die den Nenner zu Null macht. Für die Grundmenge $G = \mathbb{R}$ dagegen darf für die Variable x nicht die Zahl $x = 1{,}5$ eingesetzt werden, da für $x = 1{,}5$ der Nenner Null ist.

Mathematische Schreibweise: $D = \mathbb{R} \setminus \{x = 1{,}5\}$, Das Symbol „\ „ bedeutet: ohne.

Hinweis: Vielfach muss man bei der Bestimmung der Definitionsmenge D eines Bruchterms eine Gleichung lösen, um die Zahlen zu finden, die nicht zur Definitionsmenge gehören.

Beispiel: Für welche Zahlen ist der Bruchterm $\frac{4}{x^2 - 4x - 5}$ definiert? Hier muss die Gleichung $x^2 - 4x - 5 = 0$ gelöst werden.

Wie man Gleichungen löst, wird in Kapitel III behandelt.

Rational machen des Nenners:

Eine Wurzel (irrationale Zahl) im Nenner eines Bruches ist vielfach unerwünscht. Durch geeignete Umformungen kann man den Nenner in eine rationale Zahl umwandeln, d.h. wurzelfrei machen. Man nennt das „den Nenner rational machen“. Man muss dazu „nur“ den Bruch geschickt erweitern.

Beispiele:

(1) $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$

(2) $\frac{4x+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{4x+1}{\sqrt{x}-2} \cdot 1 = \frac{4x+1}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(4x+1) \cdot (\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2) \cdot (\sqrt{x}+2)} = \frac{(4x+1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{x-4}$

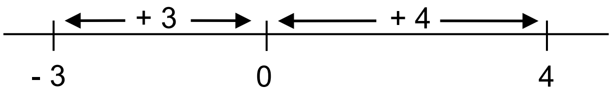
2.4 Betrag und Abstand von Zahlen:

Definition 2.4.1: Betrag einer Zahl

Der Betrag einer reellen Zahl a ist geometrisch der Abstand dieser Zahl von der Zahl 0. Da Abstände positiv sind, ist der Betrag einer Zahl immer positiv.

In Zeichen: $|\, a \,|$

anschaulich:



Es gilt: $$|\, \mathbf{a} \,| = \begin{cases} \mathbf{a} & \textbf{wenn } \mathbf{a > 0} \\ \mathbf{0} & \textbf{wenn } \mathbf{a = 0} \\ \mathbf{-a} & \textbf{wenn } \mathbf{a < 0} \end{cases}$$

Beispiel: $|\, -3 \,| = 3$

Definition 2.4.2: Abstand zweier reeller Zahlen

Der Abstand d zweier reeller Zahlen x und y mit x < y ist gegeben durch

$$\mathbf{d = |\, y - x \,|}$$

Beispiel: Berechne den Abstand der Zahlen

	x	y
a)	3	5
b)	-3	5
c)	-1	-2

zu a: $d = |\, 5 - 3 \,| = 2$

zu b: $d = |\, 5 - (-3) \,| = 8$

zu c: $d = |\, -2 - (-1) \,| = |\, -1 \,| = 1$

2.5 Summen- und Produktzeichen:

2.5.1 Summenzeichen:

Das Summenzeichen Σ (großes „S” des griechischen Alphabets, gesprochen Sigma) dient der verkürzenden Schreibweise von Summen.

Für $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \ldots + x_n$ schreibt man abkürzend: $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Definition 2.5.1: Summenzeichen

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \ldots + x_n$$

Gesprochen heißt das: **Summe aller x_i von $i = 1$ bis $i = n$**

Das Summenzeichen ist als **Arbeitsauftrag** zu verstehen, der da lautet:

Addiere alle Zahlen x_i von $i = 1$ bis $i = n$

Notation:

i heißt **Summationsindex**. Der Summationsindex kann beliebig bezeichnet werden, z.B. mit i , j , k

$$\left.\begin{array}{l} \text{i heißt untere} \\ \text{n heißt obere} \end{array}\right\} \text{Summationsgrenze}$$

Die untere Summationsgrenze gibt an, **ab** welchem Wert zu addieren ist, die obere Grenze, **bis zu** welchem Wert addiert werden muss.

Konvention: **Steht keine untere und obere Summationsgrenze am Summenzeichen, dann werden immer alle gegebenen Werte x_i aufaddiert.**

Beispiel:

Gegeben seien die Zahlen $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 6$. Zu berechnen ist

(1) $\sum\limits_{i=2}^{3} x_i$ (2) $\sum\limits_{k=2}^{4} x_k$ (3) $\frac{1}{n} \cdot \sum x_i$

Lösung:

(1) $\sum\limits_{i=2}^{3} x_i = x_2 + x_3 = 2 + 3$

(2) $\sum\limits_{k=2}^{4} x_k = x_2 + x_3 + x_4 = 2 + 3 + 6 = 11$

(3) $\frac{1}{n} \cdot \sum x_i = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = \frac{1}{4} \cdot (1 + 2 + 3 + 6) = 3$

Hinweis: Das Summenzeichen wird Ihnen hauptsächlich im Fach **Statistik** in Form von Formeln der Art $\sum x_i \cdot y_i$ oder $\frac{1}{n} \cdot \sum (x_i - 2) \cdot (y_i - 4)$ oder $\frac{1}{20} \cdot \sum (x_i - 4{,}4)^2 \cdot n_i$ unterkommen.

Auch beim Summenzeichen muss natürlich die Rechenhierarchie **Klammer- vor Potenz- vor Punkt- vor Strichrechnung** beachtet werden !!

Beispiel 1:

Gegeben seien die Zahlen $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $y_1 = 3$, $y_2 = 4$. Zu berechnen ist:

(a) $\sum x_i \cdot y_i$

(b) $\sum x_i \cdot \sum y_i$

Lösung:

(a) Hier müssen zuerst die Produkte $x_i \cdot y_i$ ausgerechnet werden und erst dann dürfen die Ergebnisse addiert werden **(Punkt- vor Strichrechnung!).**

$$\sum x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$$

(b) Hier müssen zuerst die Summen $\sum x_i$ und $\sum y_i$ ausgerechnet werden und erst dann dürfen die Ergebnisse multipliziert werden.

$$\sum x_i \cdot \sum y_i = (x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2) = (1 + 2) \cdot (3 + 4) = 3 \cdot 7 = 21$$

Wie man sieht, ist $\boldsymbol{\sum x_i \cdot y_i \neq \sum x_i \cdot \sum y_i}$

Beispiel 2:

Gegeben sind die Werte

$x_1 = 4$ $\quad x_2 = 3$ $\quad x_3 = 6$ $\quad x_4 = 7$

$n_1 = 10$ $\quad n_2 = 5$ $\quad n_3 = 2$ $\quad n_4 = 3$

Zu berechnen ist:

(a) $\frac{1}{20} \cdot \sum (x_i - 4{,}4)^2 \cdot n_i$.

(b) $\frac{1}{20} \cdot \sum x_i^2 \cdot n_i - 4{,}4^2$

Lösung:

Platzsparend und übersichtlich zu lösen sind solche Aufgaben mit Hilfe von **Arbeitstabellen**. Hierzu notiert man die gegebenen Werte in Spalten und ergänzt die Tabelle jeweils um weitere Spalten, die die einzelnen Rechenschritte beinhalten. Die letzte Zeile einer solchen Arbeitstabelle gibt die Summe der Spaltenwerte wieder.

Grundsätzlich gilt: Die Addition kommt zum Schluss!

Arbeitstabelle für Beispiel 2:

(a) $\frac{1}{20} \cdot \sum (x_i - 4{,}4)^2 \cdot n_i$

Hier muss im ersten Schritt für jeden einzelnen $x_i -$Wert zunächst die Differenz $(x_i - 4{,}4)$ gebildet werden, dann muss diese Differenz quadriert und mit der Zahl n_i multipliziert werden. **Zuletzt** müssen alle Ergebnisse **addiert** werden.

Für den Faktor $\frac{1}{20}$ benötigt man selbstverständlich keine Spalte.

Rechnung für $x_1 = 4$ und $n_1 = 4$: $(4 - 4{,}4)^2 \cdot 10 = 1{,}6$

Insgesamt ergibt sich die Arbeitstabelle zu:

	x_i	n_i	$(x_i - 4{,}4)^2 \cdot n_i$
	4	10	1,6
	3	5	9,8
	6	2	5,12
	7	3	20,28
$\sum$			**36,8**

Endergebnis: $\mathbf{\frac{1}{20} \cdot \sum (x_i - 4{,}4)^2 \cdot n_i = \frac{1}{20} \cdot 36{,}8 = 1{,}84}$

(b) $\frac{1}{20} \cdot \sum x_i^2 \cdot n_i - 4{,}4^2$

Hier stellt sich zunächst die Frage, auf welchen Ausdruck sich das Summenzeichen bezieht. Nur auf das Produkt $x_i^2 \cdot n_i$ oder auch auf die Zahl $4{,}4^2$?

Nun, würde sich das Summenzeichen auch auf $4{,}4^2$ beziehen, müsste vor $x_i^2 \cdot n_i$ eine Klammer und nach $4{,}4^2$ ebenfalls eine Klammer stehen. Steht aber nicht und daher bezieht sich das Summenzeichen nur auf das Produkt. Gleiches gilt für den Faktor $\frac{1}{20}$.

Bei diesem Ausdruck muss daher im ersten Schritt jeder einzelne $x_i -$Wert zunächst quadriert und dann mit der Zahl n_i multipliziert werden. **Zuletzt** müssen alle Ergebnisse **addiert** werden.
Für den Faktor $\frac{1}{20}$ und den Summanden $4{,}4^2$ benötigt man selbstverständlich keine Spalte.

Rechnung für $x_1 = 4$ und $n_1 = 4$: $4^2 \cdot 10 = 160$

Insgesamt ergibt sich die Arbeitstabelle zu:

	x_i	n_i	$x_i^2 \cdot n_i$
	4	10	160
	3	5	45
	6	2	72
	7	3	147
$\sum$			**424**

Endergebnis: $\frac{1}{20} \cdot \sum x_i^2 \cdot n_i - 4{,}4^2 = \frac{1}{20} \cdot 424 - 4{,}4^2 = 1{,}84$

Hinweis: Man wird natürlich keine zwei Arbeitstabellen machen, sondern die schon angefangene Arbeitstabelle um eine Spalte erweitern.

Gesamtarbeitstabelle:

	x_i	n_i	$(x_i - 4{,}4)^2 \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
	4	10	1,6	160
	3	5	9,8	45
	6	2	5,12	72
	7	3	20,28	147
$\sum$			**36,8**	**424**

Rechenregeln für das Summenzeichen:

(1) $\sum_{i=1}^{n} k \cdot x_i = k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ (Ausklammern eines gemeinsamen Faktors, DG)

(2) $\sum_{i=1}^{n} (x_i \pm y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \pm \sum_{i=1}^{n} y_i$ (Kommutativgesetz)

(3) $\sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a$ (Addition konstanter Summanden)

Die Rechenregeln sind die bekannten Rechengesetzte Kommutativgesetz und Distributivgesetz.

Beispiele:

(1) $\sum_{i=1}^{3} k \cdot x_i = k \cdot x_1 + k \cdot x_2 + k \cdot x_3 = k \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = k \cdot \sum_{i=1}^{3} x_i$

(2) $\sum_{i=1}^{2} (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

(3) $\sum_{i=1}^{n} a = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n\text{ - Summanden}} = n \cdot a$

2.5.2 Doppelsummen:

Definition 2.5.2: Doppelsummen

Eine Doppelsumme ist wie folgt definiert:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_3 y_1 + \ldots + x_n y_1$$
$$+ x_1 y_2 + x_2 y_2 + x_3 y_2 + \ldots + x_n y_2$$
$$\vdots$$
$$+ x_1 y_m + x_2 y_m + x_3 y_m + \ldots + x_n y_m$$

Dazu ein Zahlenbeispiel:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_i \cdot y_j = \sum_{i=1}^{2}(\overbrace{x_i y_1}^{j=1} + \overbrace{x_i y_2}^{j=2} + \overbrace{x_i y_3}^{j=3})$$
$$= \underbrace{(x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_1 y_3)}_{i=1} + \underbrace{(x_2 y_1 + x_2 y_2 + x_2 y_3)}_{i=2}$$

In der Statistik und in der Mathematik werden Sie vielfach mit Doppelsummen konfrontiert werden.

Beispiel 1:

Die nachfolgende Tabelle gibt die Auswertung von 20 Fragebögen zur Bewertung von Lehrveranstaltungen wieder.

	Bewertung Veranstaltung Y			
Geschlecht X	gut (j = 1)	befriedigend (j = 2)	schlecht (j = 3)	Zeilensumme
weiblich (i = 1)	$n_{11} = 6$	$n_{12} = 4$	$n_{13} = 2$	$n_{1j} = 12$
männlich (i = 2)	$n_{21} = 0$	$n_{22} = 3$	$n_{23} = 5$	$n_{2j} = 8$
Spaltensumme	$n_{i1} = 6$	$n_{i2} = 7$	$n_{i3} = 7$	n = 20

Allgemeine Symbolik für dieses Beispiel:

n_{ij} ist die absolute Häufigkeit, mit der Personen mit dem Geschlecht i die Veranstaltung mit der Note j bewertet haben (zuerst Zeile i, dann Spalte j).

Beispiel: $n_{23} = 5$ heißt: 5 männliche Personen haben die Veranstaltung mit schlecht bewertet.

Die erste Zeilensumme ergibt sich zu:

$$\sum_{j=1}^{3} n_{1j} = n_{11} + n_{12} + n_{13} = 6 + 4 + 2 = 12$$

und bedeutet: von 20 Personen haben 12 Frauen den Fragebogen ausgefüllt.

Die erste Spaltensumme ergibt sich zu:

$$\sum_{i=1}^{2} n_{i1} = n_{11} + n_{21} = 6 + 0 = 6$$

und bedeutet: 6 von 20 Personen haben die Lehrveranstaltung mit „gut“ bewertet.

Die Anzahl **n** der insgesamt ausgefüllten Bewertungsbögen ergibt sich nun als **Doppelsumme:**

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} n_{ij} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} n_{ij} &= (n_{11}+n_{21}) + (n_{12}+n_{22}) + (n_{13}+n_{23}) \\
&= \quad 6 \quad + \quad 7 \quad + \quad 7 \\
&= (n_{11}+n_{12}+n_{13}) + (n_{21}+n_{22}+n_{23}) \\
&= \quad 12 \quad + \quad 8 \\
&= 20 \\
&= n
\end{aligned}$$

Es gilt also: $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} n_{ij} = n$

Beispiel 2.

Ein Unternehmen verkauft drei Varianten eines Produktes. Nachstehende Tabelle gibt die Umsätze (in Mio. €) für das erste Vierteljahr dieses Jahres wieder:

Produktvariante i	Monat j			Gesamtumsatz je Produkt
	1	2	3	
1	10	12	14	36
2	17	18	19	54
3	9	8	7	24
monatlicher Gesamtumsatz	36	38	40	114

Allgemeine Symbolik für dieses Beispiel:

u_{ij} ist der Umsatzes des Produktes i im Monat j (zuerst Zeile i, dann Spalte j).

Beispiel: $u_{23} = 19$ heißt: Der Umsatz von Produkt i = 2 betrug im März diesen Jahres (j = 3) 19.

Die **erste** Zeilensumme ergibt sich aus: $\sum_{j=1}^{3} u_{1j} = u_{11} + u_{12} + u_{13} = 10 + 12 + 14 = 36$

Die **zweite** Spaltensumme ergibt sich aus: $\sum_{i=1}^{3} u_{i2} = u_{12} + u_{22} + u_{32} = 12 + 18 + 8 = 38$

Die gesamte Umsatzsumme ergibt sich nun als Doppelsumme:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} n_{ij} = (u_{11}+u_{21}+u_{31}) + (u_{12}+u_{22}+u_{23}) + (u_{13}+u_{23}+u_{33}) = 114$$

2.5.3 Produktzeichen:

Analog zum Summenzeichen gibt es auch ein Produktzeichen.

Das Produktzeichen $\prod$ (großes „P" des griechischen Alphabets, gesprochen Pi) dient der verkürzenden Schreibweise von Produkten.

Für das Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot \ldots \cdot x_n$ schreibt man abkürzend: $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$

Definition 2.5.2: Produktzeichen

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Gesprochen heißt das: **Produkt aller Zahlen x_i von $i = 1$ bis $i = n$**

Auch das Produktzeichen ist als **Arbeitsauftrag** zu verstehen, der da lautet:

Multipliziere alle Zahlen x_i von $i = 1$ bis $i = n$

Achtung: Das Produktzeichen darf nicht verwechselt werden mit der Kreiszahl $\pi \approx$ **3,1415926535.......**

Beispiele:

(1) $$\prod_{n=1}^{4} n^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 = 576$$

(2) $$\prod_{k=1}^{9} \frac{k+1}{k} = \frac{1+1}{1} \cdot \frac{2+1}{2} \cdot \frac{3+1}{3} \cdots \frac{9+1}{9} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} = 10$$

(3) $$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{3} (-1)^k \cdot (2k+1) &= (-1)^0 \cdot (2 \cdot 0 + 1) \cdot (-1)^1 \cdot (2 \cdot 1 + 1) \cdots (-1)^3 \cdot (2 \cdot 3 + 1) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot (-1) \cdot 7 \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 105\end{aligned}$$

Rechenregeln für das Produktzeichen:

(1) $$\prod_{i=1}^{n} c \cdot x_i = c^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i$$

(2) $$\prod_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \prod_{i=1}^{n} y_i$$

2.6 Potenzen, Wurzeln und Potenzgleichungen:

2.6.1 Potenzen

Definition 2.6.1: Potenzen

Das n – fache Produkt einer Zahl a mit sich selbst heißt n – te Potenz a^n der Zahl a.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n - Faktoren}} = a^n \longleftarrow \textbf{Exponent}$$

$$\downarrow$$

$$\textbf{Basis a}$$

Beispiel: $x \cdot x \cdot x = x^3$ ist eine Potenz mit der Basis x und dem Exponenten (Hochzahl) 3.

Spezialfälle:

- $a^0 = 1$ **Jede Zahl hoch 0 ist gleich 1 , also z.B. auch $x^0 = 1$ oder $e^0 = 1$!!!**
- $a^1 = a$ und insbesondere $1^n = 1$
- $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{wenn n eine gerade Zahl} \\ -1 & \text{wenn n eine ungerade Zahl} \end{cases}$
- $(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{wenn n eine gerade Zahl} \\ -(a^n) & \text{wenn n eine ungerade Zahl} \end{cases}$

Beweis: $(-a)^n = ((-1) \cdot a)^n = \underbrace{(-1) \cdot a \cdot (-1) \cdot a \cdot (-1) \cdot a \cdot \ldots \cdot (-1) \cdot a}_{\text{n - Faktoren}} = (-1)^n \cdot a^n$

Regel für Brüche:

Steht als Basis ein Bruch, ergibt sich aus der Definition der Potenz folgende Regel:

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ Beispiel: $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^4}{b^4}$

Achtung Klammern!

- ab^3 ist nicht dasselbe wie $(ab)^3$ und $\left(2^2\right)^3$ ist nicht dasselbe wie $(2)^{2^3}$, denn

$\Rightarrow$ $(ab)^3 = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 b^3$ und nicht ab^3

$\Rightarrow$ $\left(2^2\right)^3 = (2 \cdot 2)^3 = 4^3 = 64$, $(2)^{2^3}$ dagegen $(2)^{2^3} = 2^{\left(2^3\right)} = 2^8 = 256$

Addition von Potenzen

Potenzen kann man nur dann addieren, wenn sie gleiche Basen und gleiche Exponenten besitzen (siehe Regel zur Addition gleichnamiger Terme), denn dann lassen sich die Koeffizienten (Zahlfaktoren) ausklammern.

Beispiel:

$$\begin{aligned} T &= 4\cdot x^2+13\cdot x\cdot y^3-x^2+7\cdot x\cdot y^3 = 4\cdot x^2-x^2+13\cdot x\cdot y^3+7\cdot x\cdot y^3 \\ &= 4\cdot x^2-1\cdot x^2+13\cdot x\cdot y^3+7\cdot x\cdot y^3 \\ &= (4-1)\cdot x^2+(13+7)\cdot x\cdot y^3 \\ &= 3\cdot x^2+20\cdot x\cdot y^3 \end{aligned}$$

Potenzgesetze:

Es gibt nur Rechengesetze für Potenzen **mit gleicher Basis** und für Potenzen **mit gleichen Exponenten**.

Stimmen weder die Basis noch die Exponenten überein, lassen sich Potenzen nicht zusammenfassen.

Formal	in Worten
• $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	Potenzen gleicher Basis werden **multipliziert**, in dem man die Exponenten **addiert** und die Basis beibehält. **Beispiel:** $x^2 \cdot x^5 = x^{2+5} = x^7$
• $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	Potenzen gleicher Basis werden **dividiert**, in dem man die Exponenten **subtrahiert** und die Basis beibehält. **Beispiel:** $x^8 : x^3 = x^{8-3} = x^5$
• $a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$	Potenzen mit gleichen Exponenten werden **multipliziert**, indem man die Basen **multipliziert** und den Exponenten beibehält. **Beispiel:** $x^3 \cdot y^3 = (x\cdot y)^3$
• $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$	Potenzen werden **potenziert**, in dem man die Exponenten multipliziert. **Beispiel:** $\left(a^6\right)^3 = (a)^{6\cdot 3} = a^{18}$
• $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$	Eine negative Hochzahl bedeutet Kehrwert der Potenz. **Beispiel:** $x^3 : x^6 = x^{3-6} = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$

Beispiele:

(1) $$\frac{24\cdot a^2\cdot x^3\cdot y^6}{4\cdot y^2\cdot x^2\cdot a^2\cdot y^5} = \frac{24\cdot a^2\cdot x^3\cdot y^6}{4\cdot a^2\cdot x^2\cdot y^2\cdot y^5} = \frac{24\cdot a^2\cdot x^3\cdot y^6}{4\cdot a^2\cdot x^2\cdot y^7} = 6\cdot x\cdot y^{-1} = \frac{6\cdot x}{y}$$

(2) $$\left(\frac{m}{n}\right)^2 \div \frac{m^4}{n^5} = \frac{\frac{m^2}{n^2}}{\frac{m^4}{n^5}} = \frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{n^5}{m^4} = \frac{m^2}{m^4}\cdot\frac{n^5}{n^2} = \frac{n^3}{m^2}$$

(3) $$\frac{a^{n-4}}{a^{n-5}} = a^{(n-4)-(n-5)} = a^{n-4-n+5} = a^1 = a$$

(4) $$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{a^m}{b^m}} = 1\cdot\frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

(5)
$$\begin{aligned}
2^n + 2^{n-1} + 3^n + 2^{n+2} - 2\cdot 3^n &= 2^n + \frac{2^n}{2} + 2\cdot 2^n + 3^n - 2\cdot 3^n \\
&= 2^n + \frac{1}{2}\cdot 2^n + 2^2\cdot 2^n - 3^n \\
&= 2^n(1+\frac{1}{2}+4) - 3^n \\
&= 5{,}5\cdot 2^n - 3^n
\end{aligned}$$

2.6.2 Wurzeln

Definition 2.6.2: Wurzeln

Unter der n – ten Wurzel aus a versteht man diejenige nichtnegative Zahl b, die mit n potenziert, a ergibt, d.h.

$$\mathbf{b = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a}$$

in Zeichen: **Wurzelexponent** ⟶ $\sqrt[n]{a}$ ⟵ **Radikand:**

Spezialfälle:

$n = 1$: für n = 1 ist $\sqrt[1]{a} = a$, denn $a^1 = a$

$n = 2$: die zweite Wurzel $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ heißt **Quadratwurzel** von a. Der Wurzelexponent 2 wird in der Regel weggelassen.

$n = 3$: die dritte Wurzel $\sqrt[3]{a}$ nennt man auch **Kubikwurzel**.

Beispiele:

(1) $\sqrt[4]{81} = 3$,denn $3^4 = 81$

(2) $\sqrt[3]{8} = 2$,denn $2^3 = 8$

(3) $\sqrt[1]{217} = 217$,denn $217^1 = 217$

Wurzelgesetze:

Es gibt nur Wurzelgesetze für die Multiplikation bzw. Division.

Wurzelgesetze

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Insbesondere gilt: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ und $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Das **Radizieren** (Wurzelziehen) ist die Umkehrung des **Potenzierens**.

Es gilt daher: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, insbesondere $\left(\sqrt[2]{a}\right)^2 = a$

Beispiele:

(1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} = 9$

(2) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$

(3) $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

(4) $\sqrt[8]{5^{16}} = 5^{\frac{16}{8}} = 5^2 = 25$

(5) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[3 \cdot 4]{a} = \sqrt[12]{a}$

Binomische Formeln für Wurzel:

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + b$$

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + b$$

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \cdot \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$$

Beispiele:

(1) $(\sqrt{3x} + \sqrt{y})^2 = 3x + 2 \cdot \sqrt{3x} \cdot \sqrt{y} + y$ und **nicht (!)** $3x + y$

(2) $(\sqrt{4r - 100} - 10)^2 = 4r - 100 - 2 \cdot 10 \cdot \sqrt{4r - 100} + 100$

$= 4r - 20 \cdot \sqrt{4r - 100}$

und **nicht (!)** $4r - 100 + 100 = 4r$

Die binomischen Formeln für Wurzeln zu beachten, ist beim Lösen von Wurzelgleichungen (siehe Kapitel III) wichtig. Keinesfalls darf eine Gleichung wie z.B. $\sqrt{4r - 100} - 10 = 0$ gleich quadriert werden, sondern man muss zunächst umformen zu $\sqrt{4r - 100} = 10$ und dann quadrieren, denn dann ergibt sich $4r - 100 = 100$ und damit r zu $r = 50$.

Beachte: Wurzelterme sind nur definiert für nichtnegative Radikanden!

Zwar könnte man für ungerade Wurzelexponenten definieren, dass beispielsweise $\sqrt[3]{-8} = -2$ ist, denn $(-2)^3 = -8$, aber das würde mathematisch zu Widersprüchen führen, wie nachstehendes Beispiel zeigt:

Angenommen, $\sqrt[3]{-8} = -2$ wäre definiert. Dann ergibt sich mit Hilfe der Potenzgesetze folgende Gleichung:

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Somit wäre **–** 2 = 2.

Hinweis:

Man muss zwischen dem Term $\sqrt[n]{a}$ und der Lösungsmenge einer Potenzgleichung $x^n = a$ unterscheiden. Der Term $\sqrt[n]{a}$ ist nur definiert für $a \geq 0$. Gesucht ist hier eine nicht negative Zahl, die mit n potenziert a ergibt.

Bei einer Gleichung dagegen sind alle Zahlen gesucht, die die Gleichung lösen, d.h. beim Einsetzen von x zu einer wahren Aussage führen.

Deshalb hat die Gleichung $x^2 = 81$ zwei Lösungen, denn $x_1 = 9$ oder $x_2 = -9$ führen beim Einsetzen für x zu wahren Aussagen ($9^2 = 81$, $(-9)^2 = 81$).

Ebenso hat die Gleichung $x^3 = -8$ eine Lösung, denn $(-2)^3 = -8$. Da die Wurzel aus einer negativen Zahl nicht definiert ist, schreibt man für die Lösung der Gleichung $x^3 = -8$ mathematisch korrekt: $x = -\sqrt[3]{|-8|}$ (siehe: 2.4 Betragt einer Zahl).

Genaueres zur Lösung von Potenzgleichungen erfahren Sie im Kapitel III.

2.7 Logarithmus:

Das Rechnen mit Logarithmen ist sehr einfach. Die Rechenart „Logarithmus“ ist die Frage nach dem Exponenten (der Hochzahl). Betrachten Sie dazu folgende Beispiele:

	Gleichung	Lösung	Gleichung	Lösung
(1)	$2^x = 1$	$x = 0$, denn $2^0 = 1$	$10^x = 1$	$x = 0$, denn $10^0 = 1$
(2)	$2^x = 2$	$x = 1$, denn $2^1 = 2$	$10^x = 10$	$x = 1$, denn $10^1 = 10$
(3)	$2^x = 4$	$x = 2$, denn $2^2 = 4$	$10^x = 100$	$x = 2$, denn $10^2 = 100$
(4)	$2^x = 8$	$x = 3$, denn $2^3 = 8$	$10^x = 1000$	$x = 3$, denn $10^3 = 1000$

Für einfache Gleichungen – so man noch das „Ein-mal-Eins“ beherrscht – ist es daher kein Problem, solche Exponenten zu finden. Auch für $3^x = 27$ ist die Lösung „im Kopf“ zu finden, nämlich $x = 3$, denn $3^3 = 27$. Was an den Beispielen auffällt, ist die Tatsache, dass zwar die Basis bei allen Beispielen unterschiedlich ist, nicht aber die Lösung. Nicht mehr im Kopf zu rechnen ist natürlich beispielsweise $5^x = 13$.

Für welche reelle Zahl x aber ist $5^x = 13$

Um solche Gleichungen zu lösen, braucht man eine neue Rechenart, die **logarithmieren** genannt wird.

Definition 2.7.1: Logarithmus

Gegeben sind zwei positive Zahlen y und b ($b \neq 1$). Dann versteht man unter dem Logarithmus von y zur Basis b diejenige Zahl x, mit der man b potenzieren muss, um y zu erhalten:

Schreibweise: $b^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b y$

$\log_b y$ bedeutet: Logarithmus von y zur Basis b

Wer mathematische Schreibweisen nicht mag, merke sich einfach:

$\log_b y$ bedeutet: Mit welcher Zahl x muss man die Basis b potenzieren um y zu erhalten

Beispiele:

(1) $\log_3 81$ bedeutet: Mit welcher Zahl x muss die Basis b = 3 potenziert werden, um 81 zu erhalten oder etwas formaler: „Suche die Zahl x, für die gilt: $3^x = 81$. Diese Zahl ist gleich 4, denn $3^4 = 81$. Es ist also $\log_3 81 = 4$

(2) $\log_2 1024$ bedeutet: Mit welcher Zahl x muss die Basis b = 2 potenziert werden, um 1024 zu erhalten oder etwas formaler: „Suche die Zahl x, für die gilt: $2^x = 1024$. Diese Zahl ist gleich 10, denn $2^{10} = 1024$. Es ist also $\log_2 1024 = 10$.

3) $\log_a(a)$ bedeutet: Mit welcher Zahl x muss die Basis a potenziert werden, um a zu erhalten oder etwas formaler: „Suche die Zahl x, für die gilt: $a^x = a$.

Diese Zahl ist gleich 1, denn $a^1 = a$, **egal zu welcher Basis.**

2.7.1 Besondere Logarithmen (Basen):

Beim Rechnen im Zehnersystem wird als Basis die Zahl a = 10 benutzt, bei vielen Naturprozessen mit stetigem Wachstum (stetige Verzinsung, radioaktiver Zerfall usw.) spielt die **Eulersche Zahl**[1]

$$e \approx 2{,}7182818...$$

eine zentrale Rolle.

Der Zehnerlogarithmus (dekadischer Logarithmus):

Logarithmen zur Basis 10 heißen **dekadische Logarithmen** (**Briggsche**[2]- oder Zehnerlogarithmen). Man schreibt abkürzend: lg y oder log y. Es gilt also

$$\mathbf{10^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log y = \lg y}$$

Beispiele:

(1) $\lg 1 = 0$, denn $10^0 = 1$

(2) $\lg 10 = 1$, denn $10^1 = 10$

(3) $\lg 10^n = n$

Der natürliche Logarithmus (logarithmus naturalis):

Logarithmen zur Basis e heißen **natürliche Logarithmen** (logarithmus naturalis). Man schreibt abkürzend: ln y. Es gilt also

$$\mathbf{e^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y \ \ (= \log_e y)}$$

Für die Zahl e gilt: $\mathbf{e = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$

[1] Leonard Euler (1707 – 1783), Schweizer Mathematiker und Physiker.

[2] Henry Briggs (1561 – 1630), Englischer Mathematiker.

Der Zweierlogarithmus (binärer Logarithmus):

Logarithmen zur Basis 2 heißen **binäre Logarithmen** (logarithmus naturalis).

Der binäre Logarithmus spielt in der Informatik eine wichtige Rolle.

Die Maßeinheit für die Datenmenge gespeicherter (übertragener) Daten ist 1 Bit (binary digit). Daten*mengen* werden dagegen meist in der Einheit Byte angegeben.

$$1\text{Byte} = 8\,\text{Bit} = 2^3\ \text{Bit}$$

$$1\text{Kilobyte} = 1024\,\text{Byte} = 2^{10}\ \text{Byte} = 2^{13}\ \text{Bit} \quad (= 2^{10} \cdot 2^3)$$

Logarithmengesetze:

Da für jede beliebige Basis b folgende Rechenregeln gelten, werden sie hier für die Basis e notiert:

1. $\mathbf{ln(u \cdot v) = ln(u) + ln(v)}$
2. $\mathbf{ln\left(\frac{u}{v}\right) = ln(u) - ln(v)}$
3. $\mathbf{ln(u^n) = n \cdot ln(u)}$
4. $\mathbf{ln(\sqrt[n]{u^m}\,) = \frac{m}{n} \cdot ln(u)}$

Wegen $b^0 = 1$ und $b^1 = b$ gilt für jede beliebige Basis b

- $\log_b(1) = 0$
- $\log_b(b) = 1$

insbesondere auch für den **natürlichen Logarithmus**: $\mathbf{ln(e) = 1}$

Hinweis: Das Rechnen mit Logarithmen wird zum Lösen von Exponentialgleichungen gebraucht und bildet das Fundament der Finanzmathematik. In der Finanzmathematik hat man es vielfach mit dem Problem zu tun, wie lange ein Anfangskapital K_0 zum Zinssatz i angelegt werden muss, um nach n Jahren ein Endkapital von K_n zu erhalten.

Beispiel 1: diskrete Verzinsung

Wie lange muss ein Anfangskapital von $K_0 = 1000$ € bei diskreter Verzinsung angelegt werden, um bei 0,5% Zinsen auf ein Endkapital von $K_n = 3500$ € anzuwachsen?

Die Lösung ergibt sich durch Auflösen der (diskreten) „Zinseszinsformel“ nach n:

Zinseszinsformel diskret: $K_n = K_0 \cdot q^n \ , \ q = 1 + p\% = 1 + i$

Es ist daher $3500 = 1000 \cdot 1{,}005^n$. Aufgelöst nach n ergibt sich n zu

$$\begin{array}{rrcll} & 3500 & = & 1000 \cdot 1{,}005^n & \big| :1000 \\ \Leftrightarrow & 3{,}5 & = & 1{,}005^n & \big| \ln \\ \Leftrightarrow & \ln 3{,}5 & = & \ln(1{,}005^n) & \big| \text{Logarithmengesetz} \\ \Leftrightarrow & \ln 3{,}5 & = & n \cdot \ln(1{,}005) & \\ \Leftrightarrow & n & = & \dfrac{\ln 3{,}5}{\ln 1{,}005} \approx 251{,}18 & \end{array}$$

Hinweis: Man hätte bei der Lösung auch den Logarithmus zu jeder anderen Basis nehmen können, beispielsweise den 10er Logarithmus log. Dann ergäbe sich

$$n = \frac{\log 3{,}5}{\log 1{,}005} \approx 251{,}178 \text{ Jahre}$$

Beispiel 2: stetige Verzinsung

Nach welcher Zeit ist bei stetiger Verzinsung mit 4 % das Anfangskapital von 1000 € auf 2500 € angewachsen?

Die Lösung ergibt sich durch Auflösen der (stetigen) „Zinseszinsformel“ nach t:

Zinseszinsformel stetig: $\mathbf{K(t) = K_0 \cdot e^{i \cdot t}}$

$$\begin{array}{rrcll} & 2500 & = & 1000 \cdot e^{0{,}04 \cdot t} & \big| :1000 \\ \Leftrightarrow & 2{,}5 & = & e^{0{,}04 \cdot t} & \big| \ln \\ \Leftrightarrow & \ln 2{,}5 & = & \ln(e^{0{,}04 \cdot t}) & \\ \Leftrightarrow & \ln 2{,}5 & = & 0{,}04 \cdot t \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} & \\ \Leftrightarrow & 0{,}04t & = & \ln 2{,}5 & \\ \Leftrightarrow & t & \approx & 22{,}9 & \end{array}$$

Genaueres zur Lösung von Exponentialgleichungen erfahren Sie im Kapitel III.

Kapitel 3: Lösen von Gleichungen

3.1 Gleichungen, Definitionsmenge, Lösung, Lösungsmenge:

Definition 1: Gleichungen

Verbindet man zwei Terme T_1 und T_2 durch das Gleichheitszeichen, so entsteht eine Gleichung.

$$T_1 = T_2$$

Jede Gleichung lässt sich umformen zu $T_1 - T_2 = 0$.

Beispiel:

$T_1 = x^2$ und $T_2 = 3x + 4$. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$T_1 \;=\; T_2 \quad \text{mit} \quad x^2 = 3x + 4$$

Diese Gleichung lässt sich umformen zu $x^2 - 3x - 4 = 0$

Definition 2: Grundmenge/Definitionsmenge

Die Menge der Zahlen, die zum Einsetzen für die Variable x zur Verfügung stehen, heißt **Grundmenge G** (z.B. $G = \mathbb{N}$ oder $G = \mathbb{R}$). Die Menge der Zahlen aus der Grundmenge, die für die Variable x eingesetzt werden dürfen, heißt **Definitionsmenge D**.

Beispiele:

(1) Gegeben ist die Gleichung $\frac{4}{x-1} = 4$. Die Grundmenge sei $G = \mathbb{R}$. Dann besteht die Definitionsmenge D aus allen reellen Zahlen außer der Zahl 1, denn beim Einsetzen der Zahl 1 für die Variable x wäre der Nenner Null.

Mathematische Schreibweise: $D = \mathbb{R} \setminus \{x = 1\}$, Das Symbol „\ „ bedeutet: ohne.

(2) Gegeben ist die Gleichung $\sqrt{x-5} = 10$. Die Grundmenge sei $G = \mathbb{R}$. Dann besteht die Definitionsmenge D aus allen reellen Zahlen größer/gleich 5, denn beim Einsetzen von Zahlen kleiner 5 wäre der Radikand negativ.

mathematische Schreibweise: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$

(3) Gegeben ist die Gleichung $3x + 4 = 13$. Die Grundmenge sei $G = \mathbb{R}$. Die Definitionsmenge besteht aus allen reellen Zahlen. Hier ist $D = \mathbb{R}$.

Hinweis: Vielfach muss man bei der Bestimmung der Definitionsmenge wieder eine Gleichung lösen, um die Zahlen zu finden, die nicht zur Definitionsmenge gehören.

Beispiel: Für welche Zahlen ist die Gleichung $\frac{4}{x^2 - 4x - 5} = 7$ definiert? Hier muss die Gleichung $x^2 - 4x - 5 = 0$ gelöst werden.

Definition 3: Lösung/Lösungsmenge

Diejenigen Elemente einer Grundmenge G, die beim Einsetzen für x in die Gleichung zu einer **wahren** Aussage führen, heißen Lösungen der Gleichung. Sie werden zusammengefasst zur Lösungsmenge $\mathbb{L}$.

Beispiel 1:

Welche der beiden Zahlen $x_1 = 2$ bzw. $x_2 = -1$ sind Lösungen der Gleichung $2x = \sqrt{4x+8}$?

$\mathbf{x_1 = 2}$ ist eine Lösung der Gleichung, denn $x_1 = 2$ eingesetzt in die linke und rechte Seite der Gleichung ist eine **wahre** Aussage, wie nachstehende Rechnung zeigt:

linke Seite	rechte Seite
4	$\sqrt{4 \cdot 2 + 8} = \sqrt{16} = 4$

$$4 = 4 \quad \text{wahr}$$

$\mathbf{x_2 = -1}$ ist keine Lösung der Gleichung, denn $x_2 = -1$ eingesetzt in die linke und rechte Seite der Gleichung ist eine **falsche** Aussage, wie nachstehende Rechnung zeigt:

linke Seite	rechte Seite
-2	$\sqrt{4 \cdot (-2) + 8} = \sqrt{0} = 0$

$$-2 = 0 \quad \text{falsch}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist daher $\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = 2 \right\}$

Beispiel 2:

Gegeben sei die Grundmenge $G = \mathbb{N}$ und zu lösen die Gleichung $4x + 5 = 8$

$$\begin{aligned} & 4x + 5 = 8 && \mid -5 \\ \Leftrightarrow\quad & 4x = 3 && \mid :4 \\ \Leftrightarrow\quad & x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$x = \dfrac{3}{4}$ ist aber keine natürliche Zahl. Daher ist die Lösungsmenge leer. $\mathbb{L} = \{ \quad \}$

3.2 Äquivalenzumformungen, Folgerungsumformungen:

Definition 3: Äquivalenzumformungen

Äquivalenzumformungen sind Gleichungsumformungen, bei denen sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert. Zwischen Äquivalenzumformungen steht das Zeichen „$\Leftrightarrow$“.

- **Äquivalenzumformungen sind:**
  (1) Addition/Subtraktion einer x-beliebigen Zahl k auf beiden Seiten der Gleichung.
  (2) Multiplikation/Division einer x-beliebigen Zahl $k \neq 0$ auf beiden Seiten der Gleichung.
- **<u>keine</u> Äquivalenzumformungen sind:**
  (1) Quadrieren
  (2) Multiplizieren/Dividieren mit einem Term, der die Variable x enthält, z.B. mit dem Term $(x-1)$

Definition 4: Folgerungsumformungen

Umformungen einer Gleichung, bei denen die Lösungsmenge gleich bleibt oder grö ßer wird, hei ßen *Folgerungsumformungen*. Zwischen auseinander gefolgerten Gleichungen steht das Zeichen „$\Rightarrow$“.

Bei Folgerungsumformungen wie beiderseitiges Quadrieren muss immer die Probe gemacht werden (!), denn die Lösungsmenge der quadrierten Gleichung kann umfangreicher sein als die der Ausgangsgleichung!

Beispiel 1:

Löst man die Gleichung $x=\sqrt{x^2+4x+16}$ nach x auf, muss zunächst auf beiden Seiten quadriert werden.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x^2+4x+16} && \left|\,(\quad)^2\right. \\ x^2 &= x^2+4x+16 && \left|\,-x^2-4x\right. \\ -4x &= 16 && \left|\,:(-4)\right. \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Eine Lösung der Gleichung scheint $x=-4$ zu sein. Macht man allerdings die Probe, ergibt sich:

Probe: linke Seite rechte Seite

- 4 $\sqrt{(-4)^2+4\cdot(-4)+16} = \sqrt{16} = 4$

$-4=4$ falsch

Es ist daher $\mathbb{L}=\{\ \}$.

Beispiel 2:

Will man die Gleichung $3x^2 - 6x = 0$ lösen, darf keinesfalls durch die Variable x dividiert werden, denn das ist keine Äquivalenzumformung. Es würde die Lösung $x = 0$ verloren gehen, wie man an folgender **(falscher!)** Umformung sieht:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x &= 0 \qquad \big| :x \\ 3x - 6 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Es ist aber $3x^2 - 6x = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x \cdot (x-2) = 0$. Nach dem Satz vom Nullprodukt ergeben sich daher die Lösungen $x = 2$ **und** $x = 0$. Durch die Division durch die Variable x würde die Lösung $x = 0$ verloren gehen.

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = 0 \text{ oder } x = 2 \right\}$$

Beispiel 3:

Eine Multiplikation bzw. Division mit einem Term, der die Variable x enthält, ist ebenfalls keine Äquivalenzumformung, wie nachstehendes Beispiel zeigt.

$$\begin{aligned} 11 \cdot (x-1) &= 5x - 5 \\ \Leftrightarrow \quad 11 \cdot (x-1) &= 5(x-1) \qquad \big| :(x-1) \\ 11 &= 5 \end{aligned}$$

Das kann natürlich nicht sein. Man sieht sofort, dass $x = 1$ eine Lösung der Gleichung ist. Würde man durch $(x-1)$ dividieren, würde man für $x = 1$ durch Null dividieren.

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = 1 \right\}$$

3.3 Grundprinzipien beim Lösen von Gleichungen:

(1) Was auf der linken Seite einer Gleichung verändert wird, muss gleichzeitig auch auf der rechten Seite verändert werden.

(2) Multipliziert/Dividiert man eine Gleichung mit einer x-beliebigen Zahl $k \neq 0$, dann muss man beide Seiten der Gleichung mit dieser Zahl multiplizieren/dividieren!

Dabei muss jeder Summand mit der Zahl multipliziert werden!

(3) Bei Gleichungsumformungen niemals mit der Variablen multiplizieren/dividieren, da die Variable gleich Null sein könnte, es sei denn, man ist sich sicher, dass die Variable nicht Null ist.

(4) Kommen Brüche in der Gleichung vor, muss zunächst mit dem Produkt der Nenner (= Hauptnenner) multipliziert werden. Dabei müssen die Zahlen, die den Nenner zu Null machen, ausgeschlossen werden!

Beispiel: $\frac{4}{(x-1)} + \frac{17}{(x+1)} = 13 \quad \Big| \cdot (x-1)\cdot(x+1) \text{ (Hauptnenner) } x \neq \pm 1$

$\Leftrightarrow \quad 4(x+1) + 17(x-1) = 13(x-1)(x+1)$

(5) Ist eine Produktgleichung $T_1(x)\cdot T_2(x)\cdots T_n(x) = 0$ gegeben oder kann man durch Ausklammern der Variablen eine Gleichung in eine Produktgleichung umformen, dann findet man alle Lösungen dieser Gleichung durch Nullsetzen der einzelnen Faktoren $T_1(x) = 0$, $T_2(x) = 0$, ..., $T_n(x) = 0$. (siehe Kapitel 2, Satz vom Nullprodukt)

Beispiel 1: $(x+4)\cdot(x+3)\cdot(x-5) = 0$

Die Lösungen dieser Gleichung ergeben sich durch Nullsetzen der einzelnen Faktoren.

$(x+4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$
$(x+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3$
$(x-5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = +5$

Beispiel 2: $x^4 - 4x^3 - 4x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \cdot (x^2 - 4x - 4) = 0$

$x^2 = 0$
$(x^2 - 4x - 4) = 0$ (siehe Lösen quadratischer Gleichungen)

Grundsätzliches:

Das Lösen von Gleichungen kann als die Berechnung von

- **Nullstellen** oder
- **Schnittstellen**

von Funktionen interpretiert werden.

3.4 Arten von Gleichungen:

3.4.1 lineare Gleichungen

Eine Gleichung heißt **lineare Gleichung** (oder Gleichung ersten Grades), wenn sie äquivalent auf die Form

$$ax + b = 0 \quad \text{mit} \quad a,b \in \mathbb{R}\ ;\ a \neq 0$$

gebracht werden kann, d.h. wenn die Gleichungsvariable x nur in erster Potenz auftritt.

Lösungsmenge linearer Gleichungen:

Eine lineare Gleichung kann

- **keine**
- **eine**
- **unendlich viele**

Lösungen haben.

Beispiel 1: keine Lösung

$$\begin{aligned} & 8-4x = -2\cdot(2x-7) && \mid \text{Klammer ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow\ & 8-4x = -4x+14 && \mid +4x \\ \Leftrightarrow\ & 8 = 14 \end{aligned}$$

Das ist eine falsche Aussage, denn $8 \neq 14$, also hat die Gleichung keine Lösung. $\mathbb{L} = \{\ \}$

Beispiel 2: eine Lösung

$$\begin{aligned} & 2x-4 = 3-5x && \mid +5x+4 \\ \Leftrightarrow\ & 7x = 7 && \mid :7 \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 \end{aligned}$$

Setzt man $x = 1$ auf beiden Seiten der Ausgangsgleichung ein, ergibt sich $-2 = -2$. Dies ist eine wahre Aussage, also hat die Gleichung die Lösung $x = 1$

Beispiel 3: unendlich viele Lösungen

$$\begin{aligned} & 2\cdot(8x-4) = 3(4x+2)+4x-14 && \mid \text{Klammern ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow\ & 16x-8 = 12x+6+4x-14 && \mid \text{zusammenfassen} \\ \Leftrightarrow\ & 16x-8 = 16x-8 && \mid +8 \\ \Leftrightarrow\ & 16x = 16x && \mid -16x \\ \Leftrightarrow\ & 0 = 0 \end{aligned}$$

$0 = 0$ ist eine allgemeingültige Aussage. Daher ist jedes beliebige $x \in \mathbb{R}$ Lösung der Ausgangsgleichung, sie besitzt daher unendlich viele Lösungen.

3.4.2 Zusammenhang zwischen linearen Gleichungen und linearen Funktionen

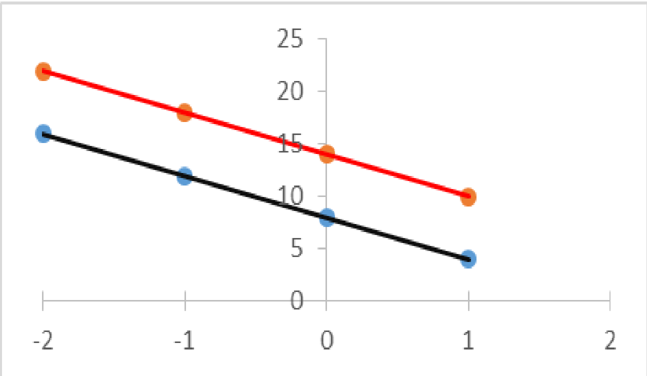
Die Lösung linearer Gleichungen kann als Schnittstellenberechnung von linearen Funktionen $f(x) = m \cdot x + b$ aufgefasst werden. Dabei gibt der Faktor vor x die Steigung der linearen Funktion an, das absolute Glied b (Summand) dagegen den Schnittpunkt mit der y-Achse (Ordinate).

Schnittstelle zweier linearer Funktionen

$f_1(x) = m_1 \cdot x + b_1$ und $f_2(x) = m_2 \cdot x + b_2$

Beispiel 1: $f_1(x) = 8 - 4x$

$f_2(x) = -2 \cdot (2x - 7) = -4x + 7$



lineare Gleichung

$m_1 \cdot x + b_1 = m_2 \cdot x + b_2$

Beispiel 1: $8 - 4x \;=\; -2 \cdot (2x - 7)$

Wenn diese Gleichung **keine** Lösung hat, dann sind – wie man sieht – die Geraden parallel.

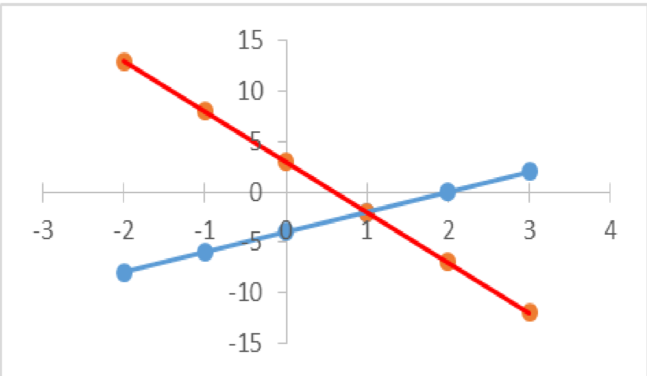
Hinweis: Das kann man natürlich auch an den gleichen Steigungen

$$m_1 = m_2 = -4$$

erkennen.

Beispiel 2: $f_1(x) = 2x - 4$

$f_2(x) = 3 - 5x$



Beispiel 2: $2x - 4 \;=\; 3 - 5x$

Die Gleichung hat die Lösung $x_S = 1$. Wie man sieht schneiden sich die Geraden an dieser Stelle.

Hat eine lineare Gleichung – wie in Beispiel 3 – unendlich viele Lösungen, dann sind die Geraden identisch, wie man an der zusammengefassten Gleichung $16x - 8 \;=\; 16x - 8$ erkennen kann.

3.4.3 quadratische Gleichungen

Eine Gleichung heißt allgemeine *quadratische Gleichung* (oder Gleichung zweiten Grades), wenn sie äquivalent auf die Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit} \quad a,b,c \in \mathbb{R} \;;\; a \neq 0$$

gebracht werden kann, d.h. wenn die Gleichungsvariable x in zweiter Potenz auftritt.

allgemeine Form einer quadratischen Gleichung:

Die Form $ax^2 + bx + c = 0$ nennt man allgemeine Form der quadratischen Gleichung

Normalform einer quadratischen Gleichung:

Die Form $x^2 + px + q = 0$ nennt man Normalform der quadratischen Gleichung.

Jede quadratische Gleichung kann durch Division mit dem Faktor a vor x^2 auf die Normalform gebracht werden. Dabei muss jeder Summand der allgemeinen quadratischen Gleichung durch den Faktor a dividiert werden.

allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0 \quad |:a$

$$\Leftrightarrow \; x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung $\frac{b}{a} =: p$ und $\frac{c}{a} =: q$ ergibt sich die

Normalform $x^2 + px + q = 0$

Beispiel: $-4x^2 - 8x + 12 = 0$ allgemeine Form $|:-4$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0$ Normalform

Lösungsmenge quadratischer Gleichungen:

Eine quadratische Gleichung kann

- **keine**
- **eine** oder
- **zwei**

Lösungen haben.

Für die **Normalform** einer quadratische Gleichung **(und nur für diese!)** berechnet man die Lösungen mit Hilfe der sogenannten p/q – Formel:

Die p/q-Formel:

Die Lösungen x_1 und x_2 der Normalform

$$x^2 + px + q = 0 \quad (a \neq 0)$$

der quadratische Gleichung berechnet man mit Hilfe der p/q – Formel

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad \textbf{oder} \qquad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Abkürzend schreibt man vielfach

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}}$$

Diskriminante D:

Der Radikand

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{p^2 - 4q}{4}$$

heißt auch **Diskriminante D** der quadratischen Gleichung.

Durch die Diskriminante entscheidet sich, ob die quadratische Gleichung keine, eine oder zwei Lösungen hat. Bekanntlich darf der Radikand (die Zahl unter dem Wurzelzeichen) nicht negativ sein. Daher können sich beim Lösen der quadratischen Gleichung folgende drei Fälle ergeben:

- Für $D < 0$ gibt es im Zahlbereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ keine Lösung.
- Für $D = 0$ gibt es genau eine Lösung, denn $\sqrt{0} = 0$.
- Für $D > 0$ gibt es zwei reelle Lösungen x_1 und x_2.

„Mitternachtsformel“:

Die Lösungsformel für die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ lautet:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Beispiel 1: keine Lösung

$2x^2 + 4x + 4 = 0 \quad \Big|\,\text{auf Normalform bringen} \quad \Big|\,:2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0$

p/q-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{-1}$$

Wie man sieht, ist die Diskriminante negativ, daher hat diese quadratische Gleichung keine Lösung (in $\mathbb{R}$).

Beispiel 2: eine Lösung

$-4x^2 + 8x - 4 = 0 \quad \Big|\,\text{auf Normalform bringen} \quad \Big|\,:(-4)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

p/q-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$= -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 1} = 1 \pm \sqrt{0}$$

Wie man sieht, ist hier die Diskriminante Null. Daher hat diese quadratische Gleichung genau eine Lösung nämlich $x_1 = 1 \pm \sqrt{0} = 1$

Beispiel 3: zwei Lösungen

$4x^2 + 8x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

p/q-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$= -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-3)} = 1 \pm \sqrt{4}$$

Die Diskriminante ist positiv. Daher hat diese quadratische Gleichung zwei Lösungen, nämlich $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{4}$ also

$$x_1 = 1 - 2 = -1$$

oder $$x_2 = 1 + 2 = 3$$

Herleitung der p/q- Formel durch quadratische Ergänzung:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + px = -q$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + px + \underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2}_{\text{quadrat. Ergänz.}} = -q + \underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2}_{\text{quadrat. Ergänz.}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}_{\text{bin. Formel}} = \underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2}_{\text{quadrat. Ergänz.}} - q \quad \Big|\sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Hinweise zum Lösen von quadratischen Gleichungen:

1. Die Anwendung der p/q-Formel ist nur für die Normalform $x^2 + px + q = 0$ mit $p \neq 0$ und $q \neq 0$ möglich und sinnvoll.

2. Für $p = 0$ erhält man die Gleichung $x^2 = -q$, die für $q \leq 0$ Lösungen in $\mathbb{R}$ hat.

   Beispiel: $x^2 - 9 = 0$

   $$\Leftrightarrow \quad x^2 = 9$$

   $$\Leftrightarrow \quad x_{1;2} = \pm 3$$

   Eine elegantere Lösung wäre allerdings die Anwendung der 3. binomischen Formel

   $$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

   Es ist also $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)\cdot(x-3) = 0$. Mit dem Satz vom Nullprodukt ergeben sich die Lösungen ebenfalls zu $x_{1;2} = \pm 3$.

3. Für $q = 0$ erhält man die Gleichung $x^2 + px = 0$, die durch Faktorisierung (Ausklammern von x) gelöst wird.

   $$x^2 + px = 0$$

   $$\Leftrightarrow \quad x(x+p) = 0$$

   Mit dem Satz vom Nullprodukt ergeben sich die Lösungen zu

   $$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -p$$

Beispiel:

$$24x^2 - 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x \cdot (3x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad 3x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{3}$$

4. Leider sieht man in Prüfungen immer wieder den **f a l s c h e n** (!!) Lösungsweg, dass bei Gleichungen der Form $x^2 + px = 0$ zuerst durch die Variable x dividiert wird. Die Division durch die Variable x ist im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung, da dadurch eine Lösung, nämlich die Lösung $x = 0$ verloren geht.

5. Sehr oft werden Gleichungen der Form $x(ax + b) = 0$ auch ausmultipliziert, um die p/q – Formel anwenden zu können. Das ist zwar mathematisch korrekt, aber etwas umständlich, da man aus der Produktdarstellung der Gleichung die Lösung unmittelbar ablesen kann.

6. Ist eine quadratische Gleichung gegeben, sollten folgende Punkte der Reihe nach abgearbeitet werden:

   - **Lässt sich bei der Gleichung die Variable ausklammern?**

     Wenn ja, dann ausklammern und erneut betrachten.

   - **Verbirgt sich hinter der quadratischen Gleichung eine binomische Formel?**

     wenn erkannt, die binomische Formel anwenden. (Immer möglich, nur zeitaufwendiger: p/q-Formel)

   - **Liegt die quadratische Gleichung in Normalform vor?**

     Wenn nein, die Gleichung in die Normalform bringen.

7. Die Punkte 1. bis 6. gelten analog für die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $b \neq 0$ und $c \neq 0$.

Weitere Beispiele:

Beispiel 1:

$$\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{3}{2} = 0 \qquad \left|\ \text{durch Multiplikation mit } \frac{4}{3} \text{ (Kehrwert) auf Normalform bringen}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

p/q-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

Es ist also $x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

oder $x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

Mit der **„Mitternachtsformel“** ergäbe sich für

$$\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{3}{2} = 0$$

mit $a = \frac{3}{4}$; $b = -\frac{9}{4}$ und $c = \frac{3}{2}$ ebenfalls

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2}}}{2 \cdot \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - \frac{72}{16}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}}{\frac{3}{2}}$$

Es ist also

$$x_1 = \frac{\frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{3}{2}} = 1$$

oder $$x_2 = \frac{\frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

Beispiel 2: $4x^2 - 20x + 25 = 0$

Bei genauerer Betrachtung sieht man, dass $4x^2 - 20x + 25$ eine binomische Formel ist. Es ist

$$4x^2 - 20x + 25 = 0 \Leftrightarrow (2x-5)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x-5)\cdot(2x-5) = 0$$

Aus der Produktdarstellung $(2x-5)\cdot(2x-5) = 0$ sieht man sofort, dass die Gleichung nur eine Lösung hat, nämlich $x = 2{,}5$ (zweifach).

Natürlich könnte man die Gleichung auch mit der p/q-Formel (oder Mitternachtsformel) lösen. Da es nur eine Lösung gibt, muss die Diskriminante D = 0 sein.

Es ist $$4x^2 - 20x + 25 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 0$$

und daher $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \pm 0$

Beispiel 3: $9x^3 - x^2 = 0$

Durch Faktorisieren von $9x^4 - x^2 = 0$ erhält man $x^2 \cdot (9x^2 - 1) = 0$ und bei weiterer genauer Betrachtung sieht man, dass im Faktor $(9x^2 - 1)$ die dritte binomische Formel steckt. Es ist nämlich

$$(9x^2 - 1) = (3x-1)\cdot(3x+1)$$

Insgesamt ergibt sich daher die Produktdarstellung

$$9x^4 - x^2 = x^2 \cdot (9x^2 - 1) = x^2 \cdot (3x-1)\cdot(3x+1) = 0$$

Die Gleichung hat daher der Reihe nach die Lösungen

$$x_1 = 0 \text{ (zweifach)}$$
$$x_2 = \frac{1}{3}$$
$$x_3 = -\frac{1}{3}$$

Beispiel 4: $x^2 - 8x + 25 = 0$

Achtung!

$x^2 - 8x + 25$ ist **keine** binomische Formel. In Frage käme zwar $(x-5)^2$, aber bei der Probe für das doppelten Produkt $2 \cdot a \cdot b$ erkennt man, dass $2 \cdot x \cdot (-5) = -10x$ ist und nicht $-8x$.

Mit der p/q – Formel ergibt sich

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 4 \pm \sqrt{16-25}$$

Da der Radikand negativ ist, hat diese Gleichung keine Lösung (in $\mathbb{R}$)

.

Hinweis: Quadratische Ergänzung

Quadratische Gleichungen lassen sich auch immer mit der sogenannten quadratischen Ergänzung lösen. Nachteil dieses Verfahrens ist, dass die quadratische Ergänzung vielfach nicht auf den ersten Blick erkennbar ist, wie zum Beispiel im Beispiel 1.

Im Beispiel 5 dagegen, sieht man die quadratische Ergänzung sofort.

$$\begin{aligned}
& x^2 - 8x + 25 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 - 8x = -25 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 - 8x + \underbrace{\left(\frac{8}{2}\right)^2}_{\text{quadrat. Ergänz.}} = -25 + \underbrace{\left(\frac{8}{2}\right)^2}_{\text{quadrat. Ergänz.}} \\
\Leftrightarrow\quad & \underbrace{\left(x - \frac{8}{2}\right)^2}_{\text{bin. Formel}} = \underbrace{\left(\frac{8}{2}\right)^2}_{\text{quadrat. Ergänz.}} - 25 \\
\Leftrightarrow\quad & (x-4)^2 = 16 - 25 \quad \Big|\sqrt{} \\
\Leftrightarrow\quad & x - 4 = \sqrt{16-25} \\
\Leftrightarrow\quad & x = 4 \pm \sqrt{-9}
\end{aligned}$$

3.4.4 Zusammenhang zwischen quadratischen Gleichungen und quadratischen Funktionen

Die Lösungen quadratischer Gleichungen kann als Nullstellenberechnung von quadratischen Funktionen $f(x) = a \cdot x^2 + bx + c$ interpretiert werden.

quadratische Gleichung	**Quadratische Funktion**
$\mathbf{a \cdot x^2 + bx + c = 0}$	$\mathbf{f(x) = a \cdot x^2 + bx + c}$

keine Lösung:

Wenn die quadratische Gleichung **keine** Lösung hat, dann hat die quadratische Funktion keine Schnittpunkte mit der x-Achse (= Nullstellen).

Der Graph der Funktion ist dann

- eine nach oben geöffnete Parabel oberhalb der x – Achse.

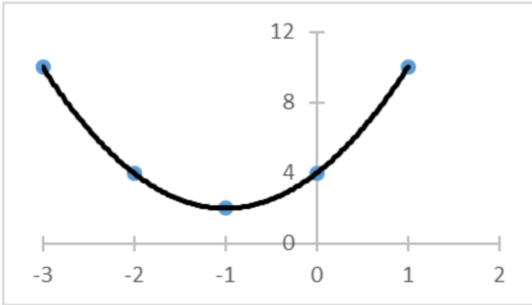
(siehe **Beispiel 1:** $2x^2 + 4x + 4 \;=\; 0$)

oder

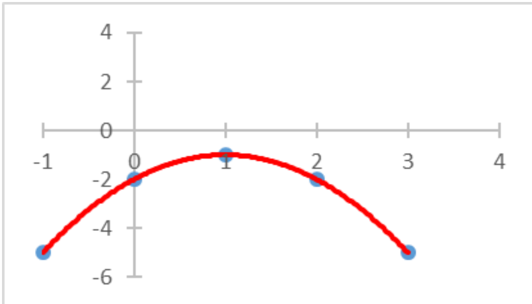
- eine nach unten geöffnete Parabel unterhalb der x – Achse.

(siehe **Beispiel 2:** $-x^2 + 2x - 2 \;=\; 0$)

Beispiel 1: $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$



Beispiel 2: $f(x) = -x^2 + 2x - 2$



eine Lösung:

Wenn die quadratische Gleichung **eine** Lösung hat, dann hat die quadratische Funktion einen Schnittpunkt mit der x-Achse (= Nullstellen).

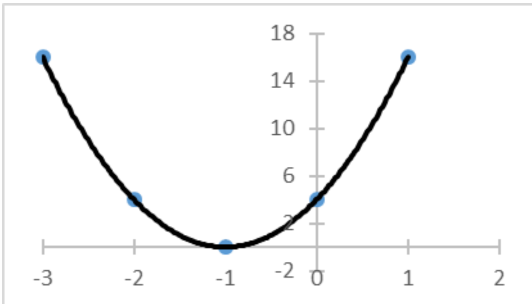
- Der Graph der Funktion berührt dann die x-Achse an dieser Stelle und ist entweder nach oben oder unten geöffnet.

Beispiel 3: $4x^2 + 8x + 4 \;=\; 0$

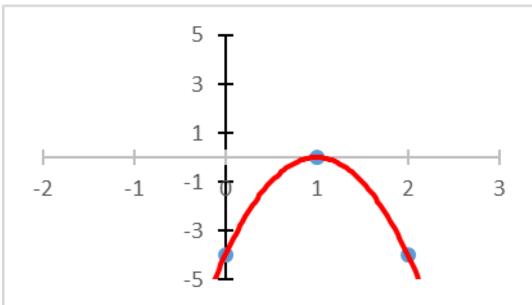
und

Beispiel 4: $-4x^2 + 8x - 4 \;=\; 0$

Beispiel 3: $f(x) = 4x^2 + 8x + 4$



Beispiel 4: $f(x) = -4x^2 + 8x - 4$



quadratische Gleichung

$$a \cdot x^2 + bx + c = 0$$

zwei Lösungen:

Wenn die quadratische Gleichung **zwei** Lösungen hat, dann hat die quadratische Funktion zwei Nullstellen (= Schnittpunkte mit der x-Achse).

- Der Graph der Funktion schneidet dann die x-Achse an diesen Stellen und ist entweder nach oben oder unten geöffnet.

Beispiel 5: $4x^2 + 8x - 12 \ = \ 0$

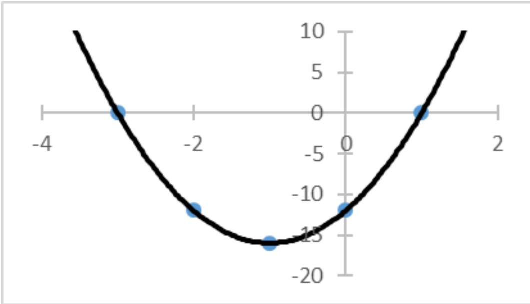
und

Beispiel 6: $-4x^2 - 8x + 12 \ = \ 0$

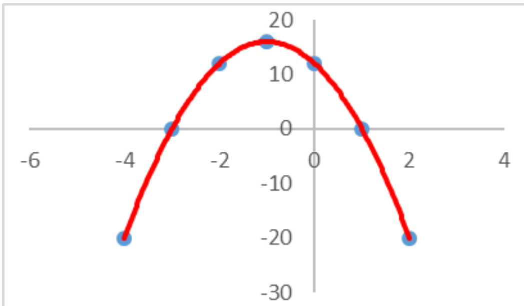
Quadratische Funktion

$$f(x) = a \cdot x^2 + bx + c$$

Beispiel 5: $f(x) = 4x^2 + 8x - 12$



Beispiel 6: $f(x) = -4x^2 - 8x + 12$



3.4.5 Potenzgleichungen

Eine Gleichung der Form

$$x^n = b \ , \ n \neq 0$$

heißt **Potenzgleichung.**

Solche Gleichungen können durch Wurzelziehen gelöst werden. Dabei gibt es ein paar Fälle zu unterscheiden:

- Ist n eine **gerade** Zahl, dann Besitzt die Potenzgleichung $x^n = b$ die Lösungen

$$x_{1;2} = \pm \sqrt[n]{b}$$

- Ist n eine **ungerade** Zahl und **b > 0**, dann Besitzt die Potenzgleichung $x^n = b$ die einzige Lösung

$$x = \sqrt[n]{b} \quad \text{für } b > 0$$

- ist n eine **ungerade** Zahl und **b < 0**, dann Besitzt die Potenzgleichung $x^n = b$ die einzige Lösung

$$x = -\sqrt[n]{|b|} \quad \text{für } b < 0$$

Beispiele:

(1) $x^4 = 81 \Leftrightarrow x_{1;2} = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$

(2) $x^3 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$

(3) $x^3 = -64 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{|-64|} = -4$

(4) $x^2 = \sqrt{6} \Leftrightarrow x_{1;2} = \pm\sqrt{\sqrt{6}} = \sqrt[4]{6}$

(5) $x^5 = \frac{32}{243} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$

(6) $x^6 = -64$ keine Lösung

3.4.6 biquadratische Gleichungen

Als **Biquadrat** wird in der Mathematik das „Quadrat des Quadrates“ bezeichnet, also die vierte Potenz einer Zahl. Biquadratische Gleichungen sind demnach Gleichungen, in denen die 4te Potenz als höchste Potenz vorkommt. Besitzt die biquadratische Gleichung nur gerade Exponenten, spricht man von einer rein biquadratische Gleichung.

Definition: (rein) **biquadratische Gleichungen**

Eine Gleichung heißt (rein) *biquadratische Gleichung*, wenn sie äquivalent auf die Form

$$a x^4 + b x^2 + c = 0 \;;\; a \neq 0$$

gebracht werden kann.

Substitution (von lat. substituere, ersetzen):

Biquadratische Gleichungen löst man durch die Substitution $u = x^2$. Die biquadratische Gleichung wird dadurch zu einer quadratischen Gleichung der Form

$$a \cdot u^2 + b \cdot u + c = 0$$

Man löst dann zuerst diese quadratische Gleichung mit z.B. der p/q- Formel.

Hat diese Gleichung keine Lösung, dann hat auch die biquadratische Gleichung keine Lösung. Sind dagegen u_1 bzw. u_2 Lösungen dieser Gleichung, dann erhält man die Lösungen x der Ausgangsgleichung als Lösungen der Gleichungen $u_1 = x^2$ und $u_2 = x^2$

Lösungsmenge biquadratischer Gleichungen:

Eine biquadratische Gleichung kann

- **keine**
- **eine**
- **zwei**
- **drei**
- **vier**

Lösungen haben.

Die Lösungen können geometrisch als Schnitt- oder Berührpunkte des Graphen einer Funktion mit der x – Achse interpretiert werden.

Beispiel 1: keine Lösung:

Biquadratische Gleichung: $x^4 - 8x^2 + 32 = 0$

Substitution:
$$u = x^2$$
$$u^2 = \left(x^2\right)^2 = x^4$$

quadratische Gleichung: $u^2 - 8u + 32 = 0$

Lösen der quadratischen Gleichung:
$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{16 - 32}$$
$$= 4 \pm \sqrt{-16}$$

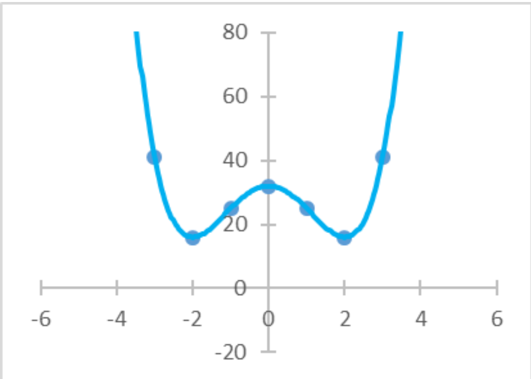
Wie man sieht, ist die Diskriminante D der quadratischen Gleichung negativ. Die biquadratische Gleichung hat demnach keine reelle Lösung, die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist daher leer.

$$\mathbb{L} = \{\ldots\}$$

Interpretiert man die Lösungen der biquadratischen Gleichung als Nullstellen der Funktion

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 32$$

dann hat diese Funktion keine Nullstellen (siehe untenstehende Graphik).



Beispiel 2: zwei Lösungen, Schnittpunkt:

Biquadratische Gleichung: $4x^4 - 32x^2 - 36 = 0$

Substitution:
$$u = x^2$$
$$u^2 = \left(x^2\right)^2 = x^4$$

quadratische Gleichung: $4u^2 - 32u - 36 = 0$

Normalform: $u^2 - 8u - 9 = 0$

Lösen der quadratischen Gleichung:
$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{16+9}$$
$$= 4 \pm \sqrt{25}$$

Es ist also

$u_1 = 4 - 5 = -1$ und $u_2 = 4 + 5 = 9$

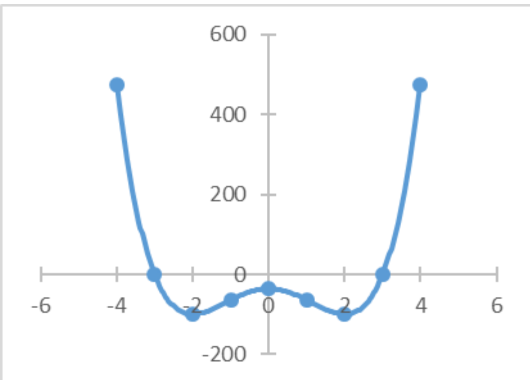
Rücksubstitution:
$$u = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{u}$$
$$u = x^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1;2} = \pm\sqrt{-1} \quad \text{keine Lösung}$$
$$u = x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1;2} = \pm\sqrt{9}$$

Die Gleichung hat daher zwei Lösungen:

$x_1 = -3$ und $x_2 = +3$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$

Als Funktionsgraph der Funktion $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ ergibt sich:



Beispiel 3: zwei Lösungen, Berührpunkt:

Biquadratische Gleichung: $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

Substitution:
$u = x^2$
$u^2 = \left(x^2\right)^2 = x^4$

quadratische Gleichung: $u^2 - 8u + 16 = 0$

Lösen der quadratischen Gleichung:

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 4 \pm \sqrt{16 - 16} = 4$$

Es ist also $u = 4$

Rücksubstitution: $u = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{u}$

$u = x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1;2} = \pm 2$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{ -2 ; 2 \}$

Als Funktionsgraph der Funktion $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ ergibt sich:

Hinweis:

Ein anderer Lösungsweg wäre hier die Anwendung einer binomischen Formel. Es ist nämlich

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 = 0$$

und damit $(x^2 - 4) = \sqrt{0} = 0$, also $x^2 = 4$ und damit ebenfalls $x_{1;2} = \pm 2$

Die Substitutionsmethode lässt sich nicht nur auf den Sonderfall biquadratischer Gleichungen anwenden sondern auf alle Gleichungen, bei denen man die Gleichungsvariable x vollständig ersetzen kann.

Beispielsweise lassen sich Gleichungen der Form

$$a\,x^{2n} + b\,x^{n} + c = 0 \quad n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2 \;;\; a \neq 0$$

bei denen die höchste Potenz der Gleichungsvariable x ein Quadrat der zweithöchsten Potenz der Gleichungsvariable x ist, ebenfalls mit Hilfe einer Substitution lösen.

Substituiert man mit $u = x^n$ wird aus der gegebene Gleichung die quadratischen Gleichung

$$a \cdot u^2 + b \cdot u + c = 0$$

Man löst dann zuerst diese quadratische Gleichung mit z.B. der p/q- Formel.

Hat diese quadratische Gleichung keine Lösung, dann hat auch die Ausgangsgleichung keine Lösung. Sind dagegen u_1 bzw. u_2 Lösungen dieser Gleichung, dann erhält man die Lösungen x der Ausgangsgleichung als Lösungen der Gleichungen $u_1 = x^n$ und $u_2 = x^n$

Hinweis: Es gilt: $x^{2n} = \left(x^n\right)^2$ (Potenzgesetz).

Beispiel 4:

Gleichung: $x^6 - 2x^3 - 80 = 0$

Substitution: $u = x^3$ und $u^2 = \left(x^3\right)^2 = x^6$

quadratische Gleichung: $u^2 - 2u + 80 = 0$

Lösen der quadratischen Gleichung: $u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 1 \pm \sqrt{81}$

Es ist also $u_1 = 1 - 9 = -8$ und $u_2 = 1 + 9 = 10$

Rücksubstitution: $u = x^3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[3]{u}$

$u = x^3 = -8 \Leftrightarrow x_1 = -\sqrt[3]{8} = -2$ und

$u = x^3 = 10 \Leftrightarrow x_2 = \sqrt[3]{10}$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ -2 \;;\; \sqrt[3]{10} \right\}$

Beispiel 5:

Gleichung: $6x - 18\sqrt{x} + 12 = 0$

Substitution: $u = \sqrt{x}$ und $u^2 = x$

quadratische Gleichung: $6u^2 - 18u + 12 = 0$

Normalform: $u^2 - 3u + 2 = 0$

Lösen der quadratischen Gleichung: $u_1 = 1$ und $u_2 = 2$

Rücksubstitution: $u = \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = u^2$

$x_1 = u_1^2 = (1)^2 = 1 \quad$ und $\quad x_2 = u_2^2 = (2)^2 = 4$

Probe:

(1) $6 \cdot 1 - 18\sqrt{1} + 12 = 6 - 18 + 12 = 0$.

(2) $6 \cdot 4 - 18\sqrt{4} + 12 = 24 - 36 + 12 = 0$

$0 = 0$ ist eine wahre Aussage, also hat die Gleichung die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{1; 2\}$

Beispiel 6:

Gleichung: $(x^2 - 8)^2 = 20 \cdot (x^2 - 8) - 19$

Substitution: $u = (x^2 - 8)$

quadratische Gleichung: $u^2 = 20u - 19 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - 20u + 19 = 0$

Lösen der quadratischen Gleichung: $u_1 = 1$ und $u_2 = 19$

Rücksubstitution:

$u_1 = (x^2 - 8) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9 \qquad x_{1;2} = \pm 3$

$u_2 = (x^2 - 8) = 19 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 27 \qquad x_{3;4} = \pm\sqrt{27}$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ -\sqrt{27}; -3; +3; +\sqrt{27} \right\}$

Etwas umständlicher hätte man natürlich auch die Klammern ausmultiplizieren und dann die biquadratische Gleichung lösen können.

3.4.7 Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen sind Gleichungen, bei denen die Gleichungsvariable x mindestens einmal im Radikanden einer Wurzel auftaucht.

Beispiele:

(1) $\sqrt{3x-6} - 5 = 0$

(2) $3x^2 - 4\sqrt{x} = 17$

(3) $3x^2 - 4x - \sqrt{8} = 1$ ist keine Wurzelgleichung, da die Gleichungsvariable x nicht im Radikanden einer Wurzel auftaucht.

Beim Lösen von Wurzelgleichungen muss **vor** dem Lösen die Definitionsmenge bestimmt werden. Es müssen alle Einsetzungen für x, für die der Radikand negativ wird, ausgeschlossen werden!

Beispiel:

Die Wurzelgleichung

$$\sqrt{x-7} + \sqrt{x-3} = 2$$

hat die Radikanden $(x-7)$ und $(x-3)$. Es sind daher nur Einsetzungen für x erlaubt, für die beide Radikanden **gleichzeitig** größer oder gleich Null sind.

Daher sind nur Einsetzungen $x \geq 7$ erlaubt, denn für beispielsweise $x = 4$ ist zwar der Radikand $(x-3)$ größer Null, nicht aber der Radikand $(x-7)$.

Ist die Grundmenge für alle Einsetzungen für x die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, so lautet die Definitionsmenge D daher:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq 7 \right\}$$

in Worten: Die Definitionsmenge D ist die Menge der reellen Zahlen größer/gleich 7.

Falls dann beim Lösen der Wurzelgleichung eine Lösung vorkommt, die kleiner 7 ist, muss diese Scheinlösung aus der Lösungsmenge ausgeschlossen werden.

Lösen von Wurzelgleichungen:

Wurzelgleichungen können durch Potenzieren der Gleichung zu einer Gleichung ohne auftretende Wurzel umgeformt werden. Notfalls muss man mehrmals potenzieren, **aber Achtung**!

Potenzieren ist keine Äquivalenzumformung!

Potenzieren ist nur dann eine Äquivalenzumformung, wenn der Exponent **ungerade** ist. Ist dagegen der Exponent **gerade** – wie beim Quadrieren – können bei der potenzierten Gleichung Lösungen dazukommen, die bei der Wurzelgleichung nicht existieren.

Es muss daher immer eine Probe gemacht werden!

Zum Lösen von Wurzelgleichungen bietet sich folgendes Vorgehen an:

1. Man bestimme die Definitionsmenge D
2. Man bringe die Wurzel alleine auf eine Seite der Gleichung
3. Man potenziere beide Seiten der Gleichung
4. Bei geraden Exponenten **unbedingt** die Probe machen

Beispiel 1:

Grundmenge $G = \mathbb{R}$, Gleichung $\sqrt{5z-5}\ +5 = 0$

Definitionsmenge: Der Radikand $(5z-5)$ muss größer/gleich Null sein, daher $z \geq 1$. Die Definitionsmenge D ergibt sich damit zu $D = \left\{ z \in \mathbb{R} \middle| \ z \geq 1 \right\}$

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{5z-5}\ +5 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{5z-5} = -5 \quad \left| \ (\ \ )^2 \right. \\
\Rightarrow \quad & 5z-5 = 25 \\
\Leftrightarrow \quad & z = 6
\end{aligned}
$$

Probe: linke Seite: $\sqrt{5z-5}\ +5 = \sqrt{5\cdot 6-5}\ +5 = 5+5 = 10$

rechte Seite 0

Zwar liegt $z = 6$ im Definitionsbereich, aber $0 = 10$ ist eine falsche Aussage, daher ist die Lösungsmenge leer, $L = \{\ \}$

Hinweis:

Würde man die Ausgangsgleichung direkt quadrieren, ergäbe sich

$$\sqrt{5z-5}\ +5 = (z-5) + 2\cdot 5\cdot \sqrt{5z-5}\ +25 = 0$$

(siehe binomische Formeln für Wurzeln)

Beispiel 2:

Grundmenge $G = \mathbb{R}$, Gleichung $\sqrt{x(x-8)} = 3$

Definitionsmenge: Der Radikand $x(x-8)$ muss größer/gleich Null sein. Da ein Produkt dann größer/gleich Null ist, wenn entweder beide Faktoren größer/gleich Null oder beide Faktoren kleiner/gleich Null sind, muss $x \le 0$ oder $x \ge 8$ sein. Die Definitionsmenge D ergibt sich damit zu

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \, x \le 0 \text{ oder } x \ge 8 \right\}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{x(x-8)} = 3 \quad \Big| \, (\quad)^2 \\ \Rightarrow \quad & x(x-8) = 9 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 8x - 9 = 0 \end{aligned}$$

p/q – Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 4 \pm \sqrt{25} \, .$$

Lösungen: $x_1 = 4 - 5 = -1$
$x_2 = 4 + 5 = 9$

Probe: $\mathbf{x_1 = -1}$ linke Seite: $\sqrt{x(x-8)} = \sqrt{-1\cdot(-1-8)} = \sqrt{-1\cdot(-9)} = \sqrt{9)} = 3$

rechte Seite 3

$3 = 3$ ist eine richtige Aussage und $x_1 = -1$ liegt im Definitionsbereich, daher ist $x_1 = -1$ eine Lösung der Gleichung

$\mathbf{x_1 = 9}$ linke Seite: $\sqrt{x(x-8)} = \sqrt{9\cdot(9-8)} = \sqrt{9)} = 3$

rechte Seite 3

$3 = 3$ ist eine richtige Aussage und $x_2 = 9$ liegt im Definitionsbereich, daher ist $x_2 = 9$ eine Lösung der Gleichung. Damit ergibt sich die Gesamtlösungsmenge L zu

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \, x_1 = -1 \text{ oder } x_2 = 9 \right\}$$

Beispiel 3:

Grundmenge $G = \mathbb{R}$, Gleichung $\sqrt{2x+1} + \sqrt{4x+10} = 6$

Definitionsmenge: Die Radikanden $2x+1$ und $4x+10$ müssen größer/gleich Null sein.

$$2x+1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -0{,}5$$
$$4x+10 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -2{,}5$$

Da $x \geq -0{,}5$ die „schärfere“ Bedingung ist, ergibt sich die Definitionsmenge D damit zu

$$D = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq -0{,}5 \,\}$$

Hinweis: Für beispielsweise $x = -1$ wäre zwar der Radikand $4x+10$ grösser Null, nicht aber der Radikand $2x+1$

Lösung: $\sqrt{2x+1} + \sqrt{4x+10} = 6$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}_{a^2} + \underbrace{2 \cdot \sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{4x+10}}_{2ab} + \underbrace{\left(\sqrt{4x+10}\right)^2}_{b^2} = 6^2$$

$$\Rightarrow \quad 2x+1+2 \cdot \sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{4x+10} + 4x+10 = 36$$

$$\Rightarrow \quad 6x+11+2 \cdot \sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{4x+10} = 36$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot \sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{4x+10} = -6x+25$$

$$\Rightarrow \quad 4 \cdot (2x+1) \cdot (4x+10) = (-6x+25)^2$$

$$\Rightarrow \quad 4 \cdot (8x^2+24x+10) = 36x^2 - 300x + 625$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 99x + 146{,}25 = 0$$

Lösen der quadratischen Gleichung $x^2 - 99x + 146{,}25 = 0$ ergibt

$$x_{1;2} = 49{,}5 \pm \sqrt{2304} \text{ also } x_1 = 1{,}5 \quad \text{oder} \quad x_2 = 97{,}5$$

Probe: $x_1 = 1{,}5$

linke Seite: $\sqrt{3+1} + \sqrt{6+10} = 2+4 = 6$

rechte Seite: 6

$6 = 6$ ist eine **wahre** Aussage, also ist $x = 1{,}5$ eine Lösung der Gleichung.

Probe: $x_2 = 97{,}5$

linke Seite: $\sqrt{195+1} + \sqrt{390+10} = 14+20 = 34$

rechte Seite: 6

$34 = 6$ ist eine **falsche** Aussage, also ist $x_2 = 97{,}5$ keine Lösung der Gleichung.

3.4.8 Bruchgleichungen

Bruchgleichungen sind Gleichungen, bei denen mindestens einmal eine Variable im Nenner des Quotienten auftritt.

Beispiele:

(1) $6+\dfrac{1}{x-2} = 7$

(2) $\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{4}{x+3} = \dfrac{16}{x^2-9}$

(3) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{4x}{7}=21$ ist keine Bruchgleichung, da die Gleichungsvariable x in keinem Nenner eines Bruches auftaucht.

Auch beim Lösen von Bruchgleichungen muss **vor** dem Lösen die Definitionsmenge bestimmt werden. Es müssen alle Einsetzungen für x, für die die Nenner der Quotienten gleich Null werden, ausgeschlossen werden!

Beispiel:

Die Bruchgleichung

$$\frac{1}{x} - \frac{4}{x-1} = \frac{x-3}{x+1}$$

besitzt die Nenner $x\,;x-1$ und $x+1$.

Es müssen daher die Einsetzungen $x=0$, $x=1$ und $x=-1$ ausgeschlossen werden. Ist die Grundmenge für alle Einsetzungen für x die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, so lautet die Definitionsmenge D:

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$$

in Worten: Die Definitionsmenge ist die Menge der reellen Zahlen ohne die Zahlen –1, 0, 1.

Hinweise:

(1) Vielfach muss man bei der Bestimmung der Definitionsmenge wieder eine Gleichung lösen, um die Zahlen zu finden, die nicht zur Definitionsmenge gehören.

(2) Jede Bruchgleichung kann durch Multiplikation mit dem Hauptnenner zu einer Gleichung ohne auftretende Nenner umgeformt und gelöst werden. Die Lösungen dieser umgeformten Gleichung sind jedoch nur dann Lösungen der Bruchgleichung, falls beim Einsetzen dieser Werte in die Ausgangsgleichung keiner der Nenner Null wird.

Beispiel 1:

Grundmenge $G = \mathbb{R}$, Gleichung $\frac{1}{x+4} + \frac{x}{x-4} = \frac{16x-32}{x^2-16}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{ -4 ; 4 \}$

Lösung:

$$\frac{1}{x+4} + \frac{x}{x-4} = \frac{16x-32}{x^2-16} \qquad \Big| \cdot (x+4)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x+4} \cdot (x+4)(x-4) + \frac{x}{x-4} \cdot (x+4)(x-4) = \frac{16x-32}{x^2-16} \cdot (x+4)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-4) + x \cdot (x+4) = 16x-32$$ Hinweis: $(x+4)(x-4) = x^2 - 16$

$$\Leftrightarrow \quad x-4 + x^2 + 4x = 16x-32$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 5x - 4 = 16x - 32$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 11x + 28 = 0$$

p/q – Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 28} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} .$$

Lösungen: $x_1 = \frac{11}{2} - \frac{3}{2} = 4$

$x_2 = \frac{11}{2} + \frac{3}{2} = 7$

Da $x_1 = 4$ nicht in der Definitionsmenge liegt, ist die einzige Lösung der Gleichung $x_2 = 7$. Die Lösungsmenge ergibt sich daher zu $\mathbb{L} = \{ 7 \}$

Beispiel 2:

Grundmenge $G = \mathbb{R}$, Gleichung $\frac{x^2+5x}{7+2x} = \frac{3x}{x+1}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3{,}5\,;-1\}$

Lösung:

$$\frac{x^2+5x}{7+2x} = \frac{3x}{x+1} \qquad \Big| \cdot (7+2x)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2+5x)\cdot(x+1) = 3x\cdot(7+2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3+x^2+5x^2+5x = 21x+6x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3+5x = 21x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3-16x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x\cdot(x^2-16) = 0$$

Satz vom Nullprodukt:

$$x\cdot(x^2-16) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \ \text{ oder } \ x^2-16=0$$

Die Lösungsmenge ergibt sich daher zu $\mathbb{L} = \{-4\,;0\,;4\}$

3.4.9 Exponentialgleichungen

Eine Gleichung der Form $y = a \cdot b^x$, $a, b > 0$; $b \neq 1$ heißt **Exponentialgleichung**.

Lösen von Exponentialgleichungen:

Exponentialgleichungen löst man durch Logarithmieren. Zum Lösen von Exponentialgleichungen bietet sich folgendes Vorgehen an:

1. Man bringe die Potenz b^x alleine auf eine Seite der Gleichung
2. Man logarithmiere beide Seiten der Gleichung mit dem natürlichen Logarithmus Ln
3. Man löse die logarithmierte Gleichung

Beispiel 1:

zu lösende Gleichung $120 = 20 \cdot 1{,}1^x$.

$$\begin{aligned} & 120 = 20 \cdot 1{,}1^x \quad \big| :20 \\ \Leftrightarrow \quad & 6 = 1{,}1^x \quad \big| \ln \\ \Leftrightarrow \quad & \ln 6 = \ln(1{,}1^x) \\ \Leftrightarrow \quad & \ln 6 = x \cdot \ln(1{,}1) \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{\ln 6}{\ln 1{,}1} \approx 18{,}7992 \end{aligned}$$

Man hätte hier auch mit dem Zehnerlogarithmus rechnen können, denn wird auf beiden Seiten einer Gleichung die gleiche Umformung durchgeführt, ändert sich die Lösungsmenge nicht.

Es ist $x = \dfrac{\ln 6}{\ln 1{,}1} = \dfrac{\log 6}{\log 1{,}1} \approx 18{,}7992$

Beispiel 2:

zu lösende Gleichung $4^{x+7} = 4^{-2x+19}$.

Potenzen gleicher Basis sind genau dann gleich, wenn die Exponenten gleich sind, wenn also

$$\begin{aligned} & x + 7 = -2x + 19 \\ \Leftrightarrow \quad & 3x = 12 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 4 \end{aligned}$$

Beispiel 3:

zu lösende Gleichung $6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0$.

$$
\begin{aligned}
& 6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & -\frac{3}{2}e^{2-2x} = -6 && \Big| \cdot -\frac{2}{3} \\
\Leftrightarrow\quad & e^{2-2x} = 4 && \Big| \ln \\
\Leftrightarrow\quad & \ln e^{2-2x} = \ln(4) \\
\Leftrightarrow\quad & (2-2x)\cdot\underbrace{\ln(e)}_{=1} = \ln(4) \\
\Leftrightarrow\quad & (2-2x) = \ln(4) \\
\Leftrightarrow\quad & -2x = \ln(4)-2 && \Big| \cdot -\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & x = -\frac{1}{2}\cdot\left[\ln(4)-2\right]
\end{aligned}
$$

Umformung $x = -\frac{1}{2}\cdot\left[\ln(4) - 2\right]$:

$$
\begin{aligned}
x = -\frac{1}{2}\cdot\left[\ln(4) - 2\right] \Leftrightarrow\ & x = -\frac{1}{2}\cdot\ln(4) + 1 \\
\Leftrightarrow\ & x = -\ln(4^{\frac{1}{2}}) + 1 \\
\Leftrightarrow\ & x = -\ln(\sqrt{4}) + 1 \\
\Leftrightarrow\ & x = -\ln(2) + 1
\end{aligned}
$$

Hinweis: $x = -\frac{1}{2}\cdot\left[\ln(4)-2\right]$ lässt sich mit Hilfe von Logarithmengesetze weiter umformen zu $x = -\ln(2) + 1$ (siehe Kasten)

Beispiel 4:

zu lösende Gleichung $\frac{1}{2}e^{x} - e^{x+1} = 0$.

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}e^{x} - e^{x+1} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & e^{x} - 2e^{x+1} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & e^{x} - 2e^{x}\cdot e = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & e^{x}(1 - 2e) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 1 - 2e = 0 && \text{da } e^{x} \text{ niemals Null ist} \\
\Leftrightarrow\quad & 1 = 2e
\end{aligned}
$$

$1 = 2e$ ist eine falsche Aussage, denn $e \approx 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ \ldots$, daher hat diese Gleichung keine Lösung.

Beispiel 5:

zu lösende Gleichung $e^x - \frac{5}{4}e^{-x} + 2 = 0$.

$$
\begin{aligned}
& & e^x - \frac{5}{4}e^{-x} + 2 &= 0 \\
&\Leftrightarrow & 4e^x - 5e^{-x} + 8 &= 0 \\
&\Leftrightarrow & 4e^x - \frac{5}{e^x} + 8 &= 0 & \quad \Big| \cdot e^x \\
&\Leftrightarrow & 4(e^x)^2 + 8e^x - 5 &= 0 & \quad \text{Substitution } z = e^x \\
&\Leftrightarrow & 4z^2 + 8z - 5 &= 0 \\
&\Leftrightarrow & z^2 + 2z - \frac{5}{4} &= 0
\end{aligned}
$$

p/q – Formel:

$$z_{1;2} = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{5}{4}}$$

(1) $z_1 = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$

(2) $z_2 = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Rücksubstitution:

Es ist $z = e^x \Leftrightarrow x = \ln(z)$.

Daher hat (1) $z = e^x = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \ln(-\frac{5}{2})$ keine Lösung.

und (2) $z = e^x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln(\frac{1}{2})$

$x = \ln(\frac{1}{2})$ lässt sich – so man will – weiter umformen zu $x = -\ln(2)$ (siehe Kasten unten)

$x = \ln(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \ln(1) - \ln(2) = 0 - \ln(2) = -\ln(2)$ (Logarithmengesetz 2)

oder

$x = \ln(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \ln(2^{-1}) = -1 \cdot \ln(2)$ (Logarithmengesetz 3)

Anwendungsbeispiele Exponentialgleichungen:

In der Finanzmathematik hat man es vielfach mit dem Problem zu tun, wie lange ein Anfangskapital K_0 zum Zinssatz i angelegt werden muss, um nach n Jahren ein Endkapital von K_n zu erhalten.

Beispiel 1:

Wie lange muss ein Anfangskapital von $K_0 = 1000$ € angelegt werden, um bei 0,5% Zinsen auf ein Endkapital von $K_n = 3500$ € anzuwachsen?

Die Lösung ergibt sich durch Auflösen der „Zinseszinsformel“ nach n:

Zinseszinsformel: $K_n = K_0 \cdot q^n$, $q = 1 + p\% = 1 + i$

Es ist daher $3500 = 1000 \cdot 1{,}005^n$. Aufgelöst nach n ergibt sich n zu

$$n = \frac{\ln 3{,}5}{\ln 1{,}005} \approx 251{,}178 \text{ Jahre}.$$

Beispiel 2:

Der Wiederverkaufswert W (in €) eines PKW in Abhängigkeit vom Alter (in Jahren) des PKW kann näherungsweise mit der Funktion W(t) mit $W(t) = 50\,000 \cdot e^{-0{,}24t}$ berechnet werden. Nach wie vielen Jahren beträgt der Wiederverkaufswert des PKW 11846 €?

Lösung:

$$50\,000 \cdot e^{-0{,}24t} = 11846 \qquad |:50\,000$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-0{,}24t} = \frac{11846}{50\,000} \approx 0{,}23692 \qquad |\ln$$

$$\Leftrightarrow \quad -0{,}24t = \ln(0{,}23692) \qquad |:-0{,}24$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln(0{,}23692)}{-0{,}24} = 6$$

Nach 6 Jahren beträgt der Wiederverkaufswert des PKW 11846 €

3.5.0 Betragsgleichungen:

Betragsgleichungen sind Gleichungen, bei denen mindestens einmal eine Variable im Nenner des Quotienten auftritt.

Beispiele:

(1) $\left| 2x - 17 \right| = 3x + 5$

(2) $\left| \dfrac{4}{x+1} - 5 \right| = 20$

(3) $8x - 4 = \left| -3 \right|$ ist keine Betragsgleichung, da die Gleichungsvariable x nicht in einem Betrag auftaucht.

Um Betragsgleichungen lösen zu können, muss man sich wieder daran erinnern, was der Betrag einer reellen Zahl ist. Der Betrag von 4 ist 4 (also $\left| 4 \right| = 4$), und der Betrag von – 4 ist ebenfalls 4 (also $\left| -4 \right| = 4$). Der Betrag von 0 ist 0 (also $\left| 0 \right| = 0$). Für jede reelle Zahl a gilt daher:

$$\left| a \right| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Die Methode der Fallunterscheidung:

Beim Lösen von Betragsgleichungen ist daher eine **Fallunterscheidung** erforderlich. Man betrachtet getrennt die Fälle

Fall 1: $\left| a \right| = (a)$ falls $a \geq 0$

und

Fall 2: $\left| a \right| = -(a)$ falls $a < 0$

Beispiel:

$$\left| x - 1 \right| = \begin{cases} (x-1) & \text{falls } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{falls } x < 1 \end{cases},$$

denn für $x \geq 1$ ist $(x-1) \geq 0$ und für $x < 1$ ist $(x-1) < 0$.

Dann werden die Gleichungen der einzelnen Fälle gelöst und die Lösungen mit den Voraussetzungen, die dem jeweiligen Fall zugrunde liegt, verglichen und geprüft, ob für diese Lösungen die Voraussetzungen tatsächlich erfüllt sind.

Hinweis: Je nach Aufgabenstellung können mehr als zwei Fälle auftreten.

Beispiel 1:

Grundmenge $G = \mathbb{R}$, zu lösende Gleichung $|\ x+2\ | = 3$

Rechenvorschrift: $|\ x+2\ | = \begin{cases} (x+2) & \text{falls } x \geq -2 \\ -(x+2) & \text{falls } x < -2 \end{cases}$

Fallunterscheidung:

Fall 1: Voraussetzung: $x \geq -2$

$$x+2 = 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 1$$

$x = 1$ ist größer - 2, also ist die Voraussetzung erfüllt, damit ist $x = 1$ eine Lösung.

Fall 2: Voraussetzung: $x < -2$

$$-(x+2) = 3 \quad |\cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow \quad x+2 = -3$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -5$$

$x = -5$ ist kleiner - 2, also ist die Voraussetzung erfüllt, damit ist $x = -5$ eine Lösung.

Insgesamt ergibt sich die Lösungsmenge zu $\mathbb{L} = \{-5;1\}$

Beispiel 2:

Grundmenge $G = \mathbb{R}$, zu lösende Gleichung $|\ 2x-6\ | = 8x$

Rechenvorschrift: $|\ 2x-6\ | = \begin{cases} (2x-6) & \text{falls } x \geq 3 \\ -(2x-6) & \text{falls } x < 3 \end{cases}$

Fallunterscheidung:

Fall 1: Voraussetzung: $x \geq 3$

$$2x-6 = 8x$$
$$\Leftrightarrow \quad -6x = 6$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -1$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, also ist $x = -1$ keine Lösung.

Fall 2: Voraussetzung: $x < 3$

$$-(2x-6) = 8x \quad | \cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x-6 = -8x$$
$$\Leftrightarrow \quad 10x = 6$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0,6$$

$x = 0,6$ ist kleiner 3. Die Voraussetzung ist also erfüllt. Daher ist $x = 0,6$ eine Lösung.

Insgesamt ergibt sich die Lösungsmenge zu $\mathbb{L} = \{0,6\}$

Beispiel 3:

Grundmenge $G = \mathbb{R}$, zu lösende Gleichung $2x+9 = 7-|x+1|$

Fall 1: Voraussetzung: $x+1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1$

$$2x+9 = 7-|x+1|$$
$$2x+9 = 7-(x+1)$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x+9 = 7-x-1$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x = -3$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -1$$

$x = -1$ erfüllt die Voraussetzung, denn $-1 \geq -1$, also ist $x = -1$ eine Lösung.

Fall 2: Voraussetzung: $x+1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1$

$$2x+9 = 7-|x+1|$$
$$2x+9 = 7-[-(x+1)]$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x+9 = 7+(x+1)$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x+9 = 8+x$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -1$$

$x = -1$ erfüllt die Voraussetzung **nicht**, denn $-1 < -1$ ist eine falsche Aussage. Daher besitzt dieser Fall keine Lösung.

Insgesamt ergibt sich die Lösungsmenge zu $\mathbb{L} = \{-1\}$

3.5.1 Parametergleichungen

Ein Parameter ist eine nicht näher angegebene feste Zahl. Hat eine Gleichung einen Parameter, spricht man von einer *Parametergleichung*.

Hinweis: Parametergleichungen sind Gleichungen, die eine Schar von unendlich vielen Gleichungen mit derselben Termstruktur vertreten. Bei der Lösung von Parametergleichungen muss meist eine Fallunterscheidung unternommen werden.

Beispiel 1:

Für welche Zahlen $k \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung $x^2 - 7x + 8 = -x + k$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ keine} \\ \bullet \text{ eine} \\ \bullet \text{ zwei} \end{array}\right\} \text{ Lösungen}$$

Lösung:

$$x^2 - 7x + 8 = -x + k$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + (8 - k) = 0$$

Mit der p/q – Formel ergibt sich:

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 3 \pm \sqrt{9 - (8 - k)} = 3 \pm \sqrt{1 + k}$$

- **keine** Lösung:
  für alle $k < -1$ ist der Radikand negativ. Daher hat für $k < -1$ die Gleichung keine Lösung.
- **eine** Lösung:
  für $k = -1$ ist der Radikand Null. Daher hat für $k = -1$ die Gleichung eine Lösung.
- **zwei** Lösungen:
  für alle $k > -1$ ist der Radikand positiv. Daher hat für $k > -1$ die Gleichung zwei Lösungen.

Beispiel 2:

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $2x + 3ax - a = 4ax + 2$.

Lösung:

$$2x + 3ax - a = 4ax + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - ax = 2 + a$$

$$\Leftrightarrow \quad (2 - a) \cdot x = 2 + a$$

Jetzt muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden:

Fall 1: $a \neq 2$:

$$(2-a)\cdot x = 2+a$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2+a}{2-a}$$

Die Lösungsmenge ergibt sich in diesem Fall zu $\mathbb{L} = \left\{ \frac{2+a}{2-a} \right\}$

Fall 2: $a = 2$:

$$0\cdot x = 4$$

ist für alle x eine falsche Aussage. Daher hat dieser Fall keine Lösung.

Hinweis: Setzt man $a = 2$ in die Ausgangsgleichung ein, ergibt sich $2x + 6x - 2 = 8x + 2$, also $-2 = 2$.

Beispiel 3:

Für welches a ist die Gleichung $4x^2 + ax^2 - ax - 2 = 0$ linear?

Lösung:

$$4x^2 + ax^2 - ax - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (4+a)x^2 - ax - 2 = 0$$

Für $a = -4$ ist die Gleichung linear und lautet $4x - 2 = 0$. Für alle anderen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich eine quadratische Gleichung.

3.5.2 ganzrationale Gleichungen n-ten Grades

Die allgemeine Form einer ganzrationalen Gleichung n-ten Grades lautet:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Die Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$; $i = 0;\ldots;n$ heißen Koeffizienten. Der höchste Exponent n bestimmt den Grad der Gleichung.

Beispiele:

(1) $3x^3 + 4x^2 + x + 7 = 0$	ist eine ganzrationale Gleichung dritten Grades, da der höchste Exponent die drei ist. Gazrationale Funktionen dritten Grades nennt man auch **kubische** Gleichungen.
(2) $4x^3 + 16x - 3 = 0$	ist ebenfalls eine ganzrationale Gleichung dritten Grades, da der höchste Exponent die drei ist.
(3) $3x^{29} + 16x^{15} + 2 = 0$	ist eine ganzrationale Gleichung vom Grad 29, da der höchste Exponent 29 ist.

Für $n = 1$:	lineare Gleichung:	$a_1x^1 + a_o = 0$	früher	$ax + b = 0$
$n = 2$:	quadratische Gleichung:	$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$	früher	$ax^2 + bx + c = 0$
$n = 3$	kubische Gleichung:	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$	früher	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Hinweise:

(1) Für ganzrationale Gleichungen dritten und vierten Grades gibt es noch Lösungsformeln, aber diese sind so umständlich, dass sie selten angewandt werden. Wer Interesse daran hat, kann „googeln", Stichwort „Cardanische Formeln".

(2) eine ganzrationale Funktion n-ten Grades – auch Polynom n-ten Grades genannt – hat die Funktionsgleichung

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Will man die Nullstellen dieser Funktion bestimmen, muss die Funktionsgleich $f(x)$ gleich Null gesetzt werden. Deshalb lässt sich das Lösen von Gleichungen als Nullstellenbestimmung von Funktionen interpretieren.

3.6 Intervallschachtelung und Polynomdivision

3.6.1 Intervallschachtelung:

Wie Sie bereits wissen, lässt sich das Lösen von Gleichungen als Nullstellenbestimmung von Funktionen interpretieren. In der Praxis lassen sich Nullstellen einer Funktion nur selten explizit, d.h. durch Auflösen der Gleichung f(x) = 0 nach der Variablen x, berechnen.

Die Numerische Mathematik bietet iterative Verfahren an, mit denen die Nullstellen näherungsweise berechnet werden können. **Iterativ** heißt hierbei, sich (ausgehend von ersten Schätzwerten für eine Nullstelle) schrittweise in wiederholenden Rechnungen der exakten Lösung annährend. Mathematisch formuliert, ausgehend von ersten Schätzwerten für eine Nullstelle eine Folge zu definieren, deren Grenzwert die gesuchte Nullstelle ist.

Ein solches Verfahren ist die so genannte **Intervallschachtelung.** Mathematische Grundlage für das Verfahren ist der **Nullstellensatz** bzw. in seiner Verallgemeinerung der **Zwischenwertsatz.**

> Inhaltlich besagten **Zwischenwert- bzw. Nullstellensatz**, dass eine reelle Funktion f, die auf einem abgeschlossenen Intervall [*a*,*b*] stetig ist, jeden Wert zwischen *f*(*a*) und *f*(*b*) annimmt (Zwischenwertsatz). Haben insbesondere *f*(*a*) und *f*(*b*) verschiedene Vorzeichen, so garantiert der Zwischenwertsatz die Existenz von mindestens einer Nullstelle von *f* im Intervall [*a*,*b*]. Dieser Sonderfall ist als *Nullstellensatz von Bolzano* bekannt und nach Bernard Bolzano benannt[1].

Beispiel 1:

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$x - 150 - \frac{500\,000}{x^2} = 0 \; ; \; x \neq 0 .$$

Lösung:

Es ist

$$\begin{aligned} x - 150 - \frac{500\,000}{x^2} &= 0 \quad \Big| \cdot x^2 \\ \Leftrightarrow \quad x^3 - 150x^2 - 500\,000 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x^3 - 150x^2 &= 500\,000 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 \cdot (x - 150) &= 500\,000 \end{aligned}$$

Da x^2 stets positiv ist, weiß man jetzt, dass x größer als 150 sein muss, denn sonst wäre das Produkt $x^2 \cdot (x - 150)$ negativ! Die Multiplikation mit der Variablen x ist hier erlaubt, da $x = 0$ ausgeschlossen wurde.

---

[1] : **Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano** (* 05.10.1781 in Prag; † 18.12.1848 in Prag) war ein katholischer Priester, Philosoph und Mathematiker.

Wir raten beispielsweise $x_0 = 200$ und erhalten $200^2 \cdot 50 = 2000000$ und damit einen viel zu großen Wert. Wir tippen beispielsweise $x_1 = 160$ und erhalten $160^2 \cdot 10 = 256000$, also einen Wert, der zu klein ist.

Was wir jetzt allerdings wissen ist, dass die Lösung zwischen $x_0 = 200$ und $x_1 = 160$ liegen muss. Mathematisch formuliert, muss die Lösung also im Intervall $\left[160\,,\,200\right]$ liegen.

Die Idee ist nun, schrittweise das Intervall zu verkleinern ohne die Eigenschaft der unterschiedlichen Vorzeichen der Funktionswerte zu verlieren.

Tippen wir also beispielsweise $x_2 = 170$. Wir erhalten dann $170^2 \cdot 20 = 578000$, also einen Wert, der etwas zu groß ist. Was wir jetzt allerdings wiederum wissen ist, dass die Lösung zwischen 160 und 170 liegen muss und wenn wir die Ergebnisse genauer betrachten, näher bei 170 als bei 160.

Je nach gewünschter Genauigkeit, lässt sich diese Vorgehensweise beliebig oft wiederholen.

Aber Achtung:

Sie können sich im wahrsten Sinne des Wortes zu Tode rechnen, nämlich dann, wenn die Lösung eine irrationale Zahl ist.

Beispiel 2:

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$0{,}03\,x - 1{,}35 - \frac{6000}{x^2} = 0\,.$$

Lösung:

$$0{,}03\,x - 1{,}35 - \frac{6000}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}03\,x^3 - 1{,}35\,x^2 - 6000 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - 45\,x^2 = 200000$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot (x - 45) = 200000$$

x muss größer 45 sein, da sonst das Produkt negativ wäre:

$x = 70$: $70^2 \cdot 25 = 122500$ zu klein.

$x = 80$: $80^2 \cdot 35 = 2240500$ zu groß

also muss x zwischen 70 und 80 liegen, wobei x näher bei 80 liegt:

$x = 78$: $78^2 \cdot 33 = 200772$ (etwas) zu groß

$x = 77$: $77^2 \cdot 32 = 189728$ zu klein

Die Lösung ist etwa $x \approx 78$.

3.6.2 Polynomdivision:

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung von Nullstellen einer Funktion wäre die sogenannte **Polynomdivision**. Um die Polynomdivision anwenden zu können, muss eine Lösung gegeben bzw. durch „Raten“ **exakt** ermittelbar sein.

Findet man keine exakte Lösung, ist diese Methode nicht anwendbar. Deshalb ist die Polynomdivision als Methode zur Bestimmung von Lösungen einer Gleichung (Nullstellen von Funktionen) nur bedingt geeignet. Die Intervallschachtelung dagegen funktioniert immer und ohne exaktes „Raten“ der Lösung.

Polynomdivision:

Es gilt der Satz:

<u>Satz:</u> Sei x_1 eine Nullstelle einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades $f(x)$.
Dann gilt:

$$f(x) = (x - x_1) \cdot g(x),$$

wobei $g(x)$ eine ganzrationale Funktion vom Grad (n – 1) ist. Der Faktor $(x - x_1)$ heißt **Linearfaktor**.

Idee der Polynomdivision:

Bestimme $g(x)$ durch Division von $f(x)$ mit dem Linearfaktor $(x - x_1)$

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1)}$$

Anders formuliert:

Ist x_1 Nullstelle der ganzrationalen Funktion $f(x)$, dann ist $f(x)$ durch $(x - x_1)$ ohne Rest teilbar.

Hinweise:

(1) Man kann natürlich beide Verfahren kombinieren. Zum Beispiel mit Hilfe einer Intervallschachtelung versuchen, eine Lösung exakt zu bestimmen und dann das Verfahren der Polynomdivision anwenden.

(2) Weitere Verfahren zur Nullstellenbestimmung: Newton-Verfahren, Regula Falsi, Horner Schema

Beispiel 1:

Löse die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Raten einer Lösung:

Versuch 1: Raten $x = 1$: $(1)^3 - 6(1)^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 12 - 12 = 0$, **Glück gehabt!**

$x = 1$ ist Lösung der Gleichung $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, also muss die Gleichung den Linearfaktor $(x - 1)$ beinhalten, es muss also gelten:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1) \cdot g(x)$$

und damit

$$g(x) = (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1)$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad -5x^2 + 11x - 6 \\
\quad \underline{-(-5x^2 + 5x)} \\
\qquad\quad 6x - 6 \\
\qquad\quad \underline{-(6x - 6)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Es ist daher $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1) \cdot (x^2 - 5x + 6) = 0$

Da ein Produkt dann Null ist, wenn einer der Faktoren Null ist, ergeben sich die Lösungen durch Nullsetzen der einzelnen Faktoren:

$(x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

$(x^2 - 5x + 6) = 0$ hat die Lösungen $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$.

Insgesamt ergibt sich die Lösungsmenge zu $\mathbb{L} = \{1; 2; 3\}$

Beispiel 2:

Löse die Gleichung $2x^3 + 8x^2 + 12x + 8 = 0$

Raten einer Lösung:

Versuch 1: Raten $x = +1$: $2\cdot(1)^3 - 8\cdot(1)^2 + 12\cdot 1 + 8 = 2 - 8 + 12 + 8 = 14 \neq 0$

Versuch 2: Raten $x = -1$: $2\cdot(-1)^3 - 8\cdot(-1)^2 + 12\cdot(-1) + 8 = -2 - 8 - 12 + 8 = -14 \neq 0$

Versuch 3: Raten $x = +2$: $2\cdot(2)^3 - 8\cdot(2)^2 + 12\cdot(2) + 8 = 16 - 32 + 24 + 8 = 16 \neq 0$

Versuch 4: Raten $x = -2$: $2\cdot(-2)^3 - 8\cdot(-2)^2 + 12\cdot(-2) + 8 = -16 - 32 - 24 + 8 = 0$

$x = -2$ ist Lösung der Gleichung $2x^3 + 8x^2 + 12x + 8 = 0$, also muss die Gleichung den Linearfaktor $(x+2)$ beinhalten, es muss also gelten:

$$2x^3 + 8x^2 + 12x + 8 = (x+2)\cdot g(x)$$

und damit

$$g(x) = (2x^3 + 8x^2 + 12x + 8) : (x+2)$$

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 + 8x^2 + 12x + 8) : (x+2) = 2x^2 + 4x + 4 \\
\underline{-(2x^3 \;\; + 4x^2)} \\
\qquad 4x^2 + 12x + 8 \\
\quad \underline{-(4x^2 + 8x)} \\
\qquad\qquad 4x - 8 \\
\qquad\quad \underline{-(4x + 8)} \\
\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}
$$

Es ist daher $2x^3 + 8x^2 + 12x + 8 = (x+2)\cdot(2x^2 + 4x + 4)$

Da ein Produkt dann Null ist, wenn einer der Faktoren Null ist, ergeben sich die Lösungen durch Nullsetzen der einzelnen Faktoren:

$(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$

$(2x^2 + 4x + 4)$ hat keine Lösung.

Insgesamt ergibt sich die Lösungsmenge daher zu $\mathbb{L} = \{-2\}$

Beispiel 3:

Löse die Gleichung $x^3 - 96x^2 - 1257x + 202960 = 0$

Raten einer Lösung:

Bei dieser Gleichung ist es nahezu unmöglich, eine Lösung **exakt** zu raten, oder würden Sie eventuell raten, x sei $x = -43$? Das Verfahren der Polynomdivision ist daher nicht anwendbar, aber die Intervallschachtelung:

Intervallschachtelung:

Probieren wir es mit $\mathbf{x = 100}$: **(willkürlich gewählt!)**

$$100^3 - 96 \cdot 100^2 - 1257 \cdot 100 + 202960 = 117260 \text{, viel zu groß.}$$

Probieren wir es mit $\mathbf{x = 70}$: **(willkürlich gewählt!)**

$$70^3 - 96 \cdot 70^2 - 1257 \cdot 70 + 202960 = -12430 \text{, zu klein.}$$

Wir wissen jetzt, die Lösung muss zwischen 70 und 100 liegen und näher bei 70 als bei 100, da für x = 70 das Ergebnis näher bei Null liegt.

Probieren wir es mit $\mathbf{x = 75}$:

$$75^3 - 96 \cdot 75^2 - 1257 \cdot 75 + 202960 = -9440 \text{, zu klein.}$$

Wir wissen jetzt, die Lösung muss zwischen 75 und 100 liegen, aber nicht viel größer als 75.

Probieren wir es mit $\mathbf{x = 85}$:

$$85^3 - 96 \cdot 85^2 - 1257 \cdot 85 + 202960 = 16640 \text{, zu groß.}$$

Wir wissen jetzt, die Lösung muss zwischen 75 und 85 liegen.

Probieren wir es mit $\mathbf{x = 80}$:

$$80^3 - 96 \cdot 80^2 - 1257 \cdot 80 + 202960 = 0$$

Wir haben eine **exakte** Lösung gefunden und können jetzt die Polynomdivision anwenden. Die weiteren Lösungen sind $x_2 = -43$ und $x_3 = 59$. Rechnen Sie nach!

Kapitel 4: Lösen von Ungleichungen:

4.1 Ungleichungen:

Definition 1: Ungleichungen

Gegeben seien zwei Terme T_1 und T_2. Dann nennt man

$$T_1 < T_2 \;;\; T_1 \le T_2 \;;\; T_1 > T_2 \;;\; T_1 \ge T_2$$

Ungleichungen.

Dabei bedeuten die Zeichen

"$<$": „ist **kleiner** als"

"$\le$": „ist **kleiner oder gleich** als"

"$>$": „ist **größer** als"

"$\ge$": „ist **größer oder gleich** als"

Beispiel:

$T_1 = x^2$ und $T_2 = 3x + 4$. Daraus ergibt sich die Ungleichung

$$T_1 < T_2 \quad \text{mit} \quad x^2 < 3x + 4$$

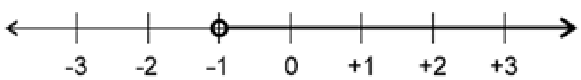
Diese Gleichung lässt sich umformen zu $x^2 - 3x - 4 < 0$

Die Begriffe **Grund-**, **Definitions-** und **Lösungsmenge** von Ungleichungen sind analog wie für Gleichungen definiert.

Die **Lösungsmenge** von Ungleichungen ist die Menge aller Zahlen aus dem Definitionsbereich, die beim Einsetzen eine wahre Aussage ergeben, d.h. die die Ungleichung erfüllen. Sie ist meist wieder eine Ungleichung, d.h. ein Intervall bzw. die **Vereinigung** von Intervallen.

Bei Ungleichungen ist es nun natürlich nicht mehr möglich, mit jeder Zahl der errechneten Lösung durch Einsetzen die Probe zu machen. **Allemal sinnvoll ist jedoch mit einer beliebigen Zahl aus der Lösungsmenge die Probe zu machen.**

Die Lösungsmenge lässt sich gut auf der **Zahlengeraden** darstellen. Hat z.B. eine Ungleichung die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > -1 \right\}$, sieht die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden folgendermaßen aus:



Der **Definitionsbereich** ist der Durchschnitt der Definitionsmenge aller Terme der Ungleichung.

Beispiele Definitionsbereich:

(1) Gegeben ist die Gleichung $\frac{4}{x-1} + \sqrt{x-5} \geq 4$. Die Grundmenge sei $G = \mathbb{R}$.

Für den ersten Term muss $x \neq 1$ sein, denn sonst ist der Nenner Null,

also $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{x = 1\}$ Das Symbol „\ „ bedeutet: ohne.

Für den 2.Term muss $x \geq 5$ sein, denn sonst ist der Radikand negativ,

also $D_2 = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 5\}$

Der Definitionsbereich ergibt sich daher zu $D = D_1 \cap D_2 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5 \}$

(2) Gegeben ist die Gleichung $\sqrt{x-5} < 10$. Die Grundmenge sei $G = \mathbb{R}$. Dann besteht die Definitionsmenge D aus allen reellen Zahlen größer/gleich 5, denn beim Einsetzen von Zahlen kleiner 5 wäre der Radikand negativ.

mathematische Schreibweise: $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 5\}$

(3) Gegeben ist die Gleichung $3x - 4 < 14$. Die Grundmenge sei $G = \mathbb{R}$. Die Definitionsmenge besteht aus allen reellen Zahlen. Hier ist $D = \mathbb{R}$.

(4) Gegeben ist die Gleichung $\frac{4}{x-1} \geq 4$. Die Grundmenge sei $G = \mathbb{R}$. Dann besteht die Definitionsmenge D aus allen reellen Zahlen außer der Zahl 1, denn beim Einsetzen der Zahl 1 für die Variable x wäre der Nenner Null.

Mathematische Schreibweise: $D = \mathbb{R} \setminus \{x = 1\}$,

Äquivalenzumformungen:

Das Lösen von Ungleichungen erfolgt ebenfalls analog dem Lösen von Gleichungen. Die gegebene Ungleichung wird so lange äquivalent umgeformt, bis eine Ungleichung der Form

$$x < c \ ; \ x > c$$

entsteht. Eine Änderung ergibt sich nur bei der Multiplikation bzw. Division mit einer negativen Zahl.

Wird eine Ungleichung mit einer **negativen** Zahl multipliziert, so ändert sich die Richtung des Ungleichheitszeichens. Aus $5 < 7 \mid \cdot(-1)$ wird $-5 > -7$.

Es stellt sich daher die Frage, welche Umformungen einer Ungleichung Äquivalenzumformungen sind, also Umformungen, bei denen die Lösungsmenge der Ungleichung nicht verändert wird. Um diese Frage zu beantworten, werden die **Anordnungsaxiome** der reellen Zahlen (Monotoniegesetze) benötigt.

Satz: Monotoniegesetze (Auswahl)**:**

Seien a, b, c reelle Zahlen (in Zeichen: $a, b, c \in \mathbb{R}$). Dann gilt:	**Beispiele:**
(1) Zwischen zwei beliebigen reellen Zahlen a und b besteht genau eine der drei Beziehungen: $a < b \;,\; a = b \;,\; a > b$	
(2) aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$: **In Zeichen**: $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$	$5 < 7$ und $7 < 11$ also $7 < 11$
(3) Auf beiden Seiten einer Ungleichung dürfen beliebige reelle Zahlen addiert oder subtrahiert werden: **In Zeichen**: $a < b \Leftrightarrow a \pm c < b \pm c$	$5 < 7$ also $5 + 3 < 7 + 3$ d.h. $8 < 10$ $5 < 7$ also $5 - 3 < 7 - 3$ d.h. $2 < 4$
(4) Wird eine Ungleichung mit einer **negativen** Zahl multipliziert, so ändert sich die Richtung des Ungleichheitszeichens. **In Zeichen**: $a < b$ und $c < 0 \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c$	$5 < 7 \;\vert\; \cdot(-1)$ $-5 > -7$ $-0{,}25\,x < 8 \;\vert\; \cdot(-4)$ $\Leftrightarrow \quad x > -32$
(5) Wird eine Ungleichung mit einer positiven Zahl multipliziert, so ändert sich die Richtung des Ungleichheitszeichens **nicht**. **In Zeichen**: $a < b$ und $c > 0 \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$	$0{,}25\,x < 8 \;\vert\; \cdot(4)$ $\Leftrightarrow \quad x < 32$
(6) $x < y$ ist äquivalent zu $a^x < a^y$, $(a > 1; x \in \mathbb{R})$ **In Zeichen**: $x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$	$a = 3$ und $4 < 6 \Leftrightarrow 3^4 < 3^6$ denn $81 < 729$ ebenso ist z.B. $e^3 < e^5$
(7) $x < y$ ist äquivalent zu $a^{-x} > a^{-y}$, $(a > 1; x \in \mathbb{R})$ d.h. $x < y$ ist äquivalent zu $\frac{1}{a^x} > \frac{1}{a^y}$, $(a > 1; x \in \mathbb{R})$ **In Zeichen**: $x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$	$a = 2$ und $4 < 6 \Leftrightarrow 2^{-4} > 2^{-6}$ denn $\frac{1}{16} > \frac{1}{64}$ ebenso ist z.B. $e^{-3} > e^{-5}$

Solche Äquivalenzumformungen sind auch mit Termen T anstatt der Zahlen a, b und c durchführbar. Unterschieden werden müssen dann die Fälle:

1. Fall: $T > 0$, das Ungleichheitszeichen „dreht“ sich **nicht** um

2. Fall: $T < 0$, das Ungleichheitszeichen „dreht“ sich um

3. Fall: $T \neq 0$, die Umformung ist nicht erlaubt (Multiplikation mit Null)

Beispiel 1:

Zu lösen ist die Ungleichung $\frac{8}{x} < 2$

Definitionsbereich: alle reellen Zahlen außer Null (in Zeichen: $D = \mathbb{R} \setminus \{x = 0\}$)

1. Fall: $x > 0$: Dann folgt aus $\frac{8}{x} < 2$ durch Multiplikation mit der Variablen x: $8 < 2x$ bzw. $2x > 8 \Leftrightarrow x > 4$.

Es muss also $x > 0$ sein **und gleichzeitig** $x > 4$. Damit ergibt sich die erste Lösungsmenge zu

$$\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$$

2. Fall: $x < 0$: Dann folgt aus $\frac{8}{x} < 2$ durch Multiplikation mit der Variablen x: $8 > 2x$ bzw. $2x < 8 \Leftrightarrow x < 4$.

Es muss also $x < 0$ sein **und gleichzeitig** $x < 4$. Damit ergibt sich die zweite Lösungsmenge zu

$$\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

3. Fall: $x = 0$: liegt nicht im Definitionsbereich

Die Gesamtlösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich damit zu

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ oder } x > 4\}$$

Beispiel 2:

Zu lösen ist die Ungleichung $\frac{2}{x} > 4$

Definitionsbereich: alle reellen Zahlen außer Null (in Zeichen: $D = \mathbb{R} \setminus \{x = 0\}$)

1. Fall: $x > 0$: Dann folgt aus $\frac{2}{x} > 4$ durch Multiplikation mit der Variablen x: $2 > 4x$

bzw. $4x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.

Es muss also $x > 0$ sein **und gleichzeitig** $x < \frac{1}{2}$, d.h. x liegt im (offenen) Intervall zwischen Null und 0,5. Die erste Lösungsmenge lautet daher

$$\mathbb{L}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 < x < \frac{1}{2} \right\}$$

2. Fall: $x < 0$: Dann folgt aus $\frac{2}{x} > 4$ durch Multiplikation mit der Variablen x: $2 < 4x$

bzw. $4x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Es muss also $x < 0$ sein **und gleichzeitig** $x > \frac{1}{2}$, was schlicht unmöglich ist. Die zweite Lösungsmenge ist daher leer.

$$\mathbb{L}_2 = \{ \; \}$$

3. Fall: $x = 0$: liegt nicht im Definitionsbereich

Die Gesamtlösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich damit zu

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 < x < \frac{1}{2} \right\}$$

andere Schreibweise (siehe Kapitel I, Intervalle):

$$\mathbb{L} = \left] 0 ; \frac{1}{2} \right[$$

4.2 lineare Ungleichungen:

Definition 1: lineare Ungleichungen

Eine **lineare Ungleichung** (oder Ungleichung ersten Grades), hat die Form

$$\boxed{ax + b < c \quad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \; ; \; a \neq 0}$$

Statt **"<"** kann auch **"≤"** , **">"** , **"≥"** stehen.

Beispiele:

1: $4x - 7 > 5$

2: $-5x + 4 < -16$

3: $\frac{4x-8}{3} + \frac{2}{6} \geq 2x - \frac{6-4x}{18}$

Lösungen:

zu 1: $4x - 7 > 5$, Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & 4x - 7 > 5 \\ \Leftrightarrow \quad & 4x > 12 \\ \Leftrightarrow \quad & x > 3 \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > 3 \right\}$

zu 2: $-5x + 4 < -16$, Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & -5x + 4 < -16 \\ \Leftrightarrow \quad & -5x < -20 \quad \left| \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \right. \\ \Leftrightarrow \quad & x > 4 \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > 4 \right\}$

zu 3: $\frac{4x-8}{3} + \frac{2}{6} \geq 2x - \frac{6-4x}{18}$, Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
& & \frac{4x-8}{3} + \frac{2}{6} &\geq 2x - \frac{6-4x}{18} \quad \Big| \cdot 18 \\
&\Leftrightarrow & 18 \cdot \frac{(4x-8)}{3} + 18 \cdot \frac{2}{6} &\geq 18 \cdot 2x - 18 \cdot \frac{(6-4x)}{18} \\
&\Leftrightarrow & 6 \cdot (4x-8) + 3 \cdot 2 &\geq 18 \cdot 2x - (6-4x) \\
&\Leftrightarrow & 24x - 48 + 6 &\geq 36 \cdot x - 6 + 4x \\
&\Leftrightarrow & 24x - 42 &\geq 40 \cdot x - 6 \quad \Big| -40x + 42 \\
&\Leftrightarrow & -16x &\geq -36 \quad \Big| : -16 \\
&\Leftrightarrow & x &\leq \frac{36}{16} = \frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq \frac{9}{4} \right\}$

4.3 Ungleichungen mit Fallunterscheidung:

Beispiel:

Zu lösen ist die Ungleichung $\frac{2x-1}{x-2} \leq 1$

Zur Lösung dieser Ungleichung muss mit dem Term $(x-2)$ multipliziert werden. Man muss daher eine Fallunterscheidung durchführen:

1. Fall: $(x-2) > 0$, das Ungleichheitszeichen „dreht" sich **nicht** um

$$(x-2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 2$$

$$\frac{2x-1}{x-2} \leq 1 \quad \Big| \cdot (x-2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x-1 \leq x-2$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq -1$$

$x \leq -1$ steht im Widerspruch zur Annahme $x > 2$

Es ist daher $\mathbb{L}_1 = \{ \ \}$

2. Fall: $(x-2) < 0$, das Ungleichheitszeichen „dreht" sich um.

$$(x-2) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$$

$$\frac{2x-1}{x-2} \leq 1 \quad \Big| \cdot (x-2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x-1 \geq x-2$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq -1$$

Es muss also $x < 2$ sein **und gleichzeitig** $x \geq -1$, d.h. x liegt im Intervall zwischen -1 und 2.

Es ist daher $\mathbb{L}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 \leq x \leq 2 \right\}$

3. Fall: $(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$ liegt nicht im Definitionsbereich. Die Umformung ist nicht erlaubt (Multiplikation mit Null).

Die Gesamtlösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich damit zu

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 < x < 2 \right\}$$

andere Schreibweise (siehe Kapitel I, Intervalle): $\mathbb{L} = [-1; 2]$

Kapitel 5: lineare Gleichungssysteme (LGs)

5.1 lineare Gleichungssysteme und Matrizen:

Definition 1: lineare Gleichungen

Eine Gleichung mit mehreren Variablen (Unbekannten) heißt **linear**, wenn die Variablen nur in der ersten Potenz vorkommen, z.B.

$$13x - 19y + 7z - 5 = 22$$

Verknüpft man lineare Gleichungen durch **„und"**, so entsteht ein **lineares Gleichungssystem**.

Ein lineares Gleichungssystem besteht daher aus einer Anzahl **m** von linearen Gleichungen mit **n** Variablen, die alle in der ersten Potenz vorkommen. Gesucht sind Zahlen x,y,z , die beim Einsetzen in jede Gleichung zu wahren Aussagen führen.

Definition 2: lineare Gleichungssysteme

Allgemein hat ein lineares Gleichungssystem folgendes Aussehen

$$\begin{array}{lll} & (1) & a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ \text{und} & (2) & a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots & & \\ \text{und} & (m) & a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array}$$

Definition 3: Matrizen

Man kann jedes lineare Gleichungssystem in Kurzform angeben, indem man in jeder Zeile nur die Koeffizienten a_{ij} und die Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ der rechten Seite notiert.
Dieses Zahlenschema nennt man *Matrix*.

Für obiges Gleichungssystem hätte man demnach folgende Matrixdarstellung:

$$A_k = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Dabei wird die $(m \times n)$–Matrix $A = (a_{ij})$ als Koeffizientenmatrix und die Matrix A_k als (die um den Vektor b erweitere) Koeffizientenmatrix bezeichnet.

Genaueres hierzu erfahren Sie in der Vorlesung „Wirtschaftsmathematik".

5.2 Lösen linearer Gleichungssysteme:

Zur Lösung linearer Gleichungssysteme gibt es verschiedene Verfahren. Für ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen haben Sie in der Schule eventuell eines der folgenden Verfahren (oder sogar alle?) kennengelernt:

- Gleichsetzungsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Additionsverfahren

Für lineare Gleichungssysteme mit mehr als zwei Gleichungen mit mehr als zwei Variablen gibt es weitere Verfahren. Das bekannteste Verfahren ist wohl das sogenannte

- **Gauß´sche Eliminationsverfahren**, auch Gaußalgorithmus genannt

Das Gauß´sche Eliminationsverfahren beruht darauf, dass elementare Umformungen, wie Multiplizieren oder Dividieren von Gleichungen zwar das Gleichungssystem ändern, aber die Lösung erhalten. Im Grunde genommen wendet man ständig das Additionsverfahren an.

Ein weiteres Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme ist die

- **Cramer´sche Regel**, auch Determinantenmethode genannt

Bei Gleichungssystemen mit mehr als drei Gleichungen und mehr als drei Variablen benötigt man für die Cramer´sche Regel darüber hinaus noch den *Determinantenentwicklungssatz nach Laplace*.

Sowohl für das Gauß´sche Eliminationsverfahren als auch für die Cramer´sche Regel benötigen Sie Grundkenntnisse der linearen Algebra wie die Multiplikation von Matrizen mit Vektoren. Diese Grundkenntnisse werden Ihnen in der Vorlesung „Wirtschaftsmathematik“ vermittelt.

Stellen Sie sich dann bei Vektoren einfach Zahlenpaare $(x\,;y)$, also Punkte $P(x\,;y)$ der Ebene oder Zahlentripel $(x\,;y\,;z)$, also Punkte $P(x\,;y\,;z)$ des Raumes vor und bei Gleichungssystemen lineare Funktionen, deren Graphen sich entweder in einen Punkt schneiden, parallel verlaufen oder identisch sind .

Hier werden nur lineare Gleichungssysteme mit zwei bzw. drei linearen Gleichungen und zwei bzw. drei Variablen behandelt.

Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme:

Lineare Gleichungssysteme, egal aus wie vielen Gleichungen sie bestehen und egal wie groß die Anzahl der Variablen ist, können

- genau eine
- keine
- unendlich viele

Lösungen haben.

5.3 lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen:

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen besteht aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten, die mit „**und**“ verknüpft sind.

$$\begin{aligned} &(1) \quad a\cdot x+b\cdot y=k \\ \text{und } &(2) \quad c\cdot x+d\cdot y=m \end{aligned}$$

Jedes **Zahlenpaar** $P(x\,;y)$, dessen Zahlen die erste **und gleichzeitig** die zweite Gleichung des Gleichungssystems erfüllen, heißt **Lösung** dieses Gleichungssystems.

Jede dieser Gleichungen lässt sich nach y auflösen. Für Gleichung (1) ergibt sich beispielsweise

$$y=-\frac{a}{b}\cdot x+\frac{k}{b} \qquad \text{für } b\neq 0$$

Setzt man $m=-\frac{a}{b}$ und $\frac{k}{b}=n$ erkennt man, dass sich hinter einer linearen Gleichung mit zwei Variablen x, y eine lineare Funktion „versteckt“: $y=m\cdot x+n$.

Alle Punkte (Zahlenpaare) $P(x|\,y)$, deren Koordinaten x und y diese lineare Gleichung erfüllen, liegen daher auf einer **Geraden** in der Zahlenebene.

Hinweis:

Falls $b=0$ ist und a von Null verschieden, lautet Gleichung (1) $a\cdot x=k \Leftrightarrow x=\frac{k}{a}$. Da dann alle x-Werte konstant sind, handelt es sich um eine Gerade, die parallel zur y – Achse verläuft.

Ist insbesondere auch noch $k=0$ ist die Gerade die y – Achse.

Beispiel:

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &(1) \quad 6x+3y=12 \\ \text{und } &(2) \quad -8x+2y=-4 \end{aligned}$$

Gesucht sind Zahlen für x und y, die beide Gleichungen **gleichzeitig** erfüllen.

Lösung:

Das Zahlenpaar $x=1$ und $y=2$, also der Punkt $P(1|\,2)$ der Ebene, ist eine Lösung des Gleichungssystems, denn

$$\begin{aligned} &(1) \quad 6\cdot 1+3\cdot 2=12=12 \\ \text{und } &(2) \quad -8\cdot 1+2\cdot 2=-4=-4 \end{aligned}$$

sind wahre Aussagen.

keine Lösung:

Das Zahlenpaar $x = 6$ und $y = -8$, ist **keine** Lösung des Gleichungssystems. Die erste Gleichung ist zwar erfüllt, denn

(1) $6 \cdot 6 + 3 \cdot (-8) = 12 = 12$ ist eine wahre Aussage

aber nicht die zweite, denn

(2) $-8 \cdot 6 + 2 \cdot (-8) = -64 = -4$ ist eine falsche Aussage

Löst man die gegebenen Gleichungen nach y auf, ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

(1') $y = -2x + 4$
und (2') $y = 4x - 2$

Wie an den Gleichungen (1') und (2') zu erkennen ist, handelt es sich hierbei um Funktionsgleichungen zweier linearer Funktionen. Wie bereits in Abschnitt 3.4.2 erläutert, können sich die Graphen zweier linearer Funktionen

- in einem Punkt schneiden, das Gleichungssystem hat dann *genau eine* Lösung
- parallel zueinander verlaufen, das Gleichungssystem hat dann *keine* Lösung oder
- identisch sein, das Gleichungssystem hat dann *unendlich viele* Lösungen oder

Diese Erkenntnis gilt für **alle** linearen Gleichungssysteme.

Wo Sie schon auf (nicht nur lineare) Gleichungssysteme getroffen sind:

(1) Beispielsweise bei der Bestimmung von Funktionsgleichungen:

Beispiel 1:

Eine lineare Funktion habe die Funktionswerte $f(100) = 9000$ und $f(200) = 8000$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion. Setzt man die gegebenen Werte in die Funktionsgleichung $f(x) = m \cdot x + b$ ein, ergibt sich das lineare Gleichungssystem

(1) $100m + b = 9000$
und (2) $200m + b = 8000$

Beispiel 2:

Eine Exponentialfunktion besitzt die Werte $f(-19) = 265$ und $f(1) = 95$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion. Setzt man die gegebenen Werte in die Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot b^x$ ein, ergibt sich das lineare Gleichungssystem

(1) $a \cdot b^{-19} = 265$
und (2) $a \cdot b = 95$

(2) Beispielsweise bei Textaufgaben der Art:

Vater und Sohn sind zusammen 109 Jahre. Sohn und Enkel des Vaters sind zusammen 56 Jahre, der Vater und der Sohn sind zusammen 85 Jahre. Wie alt sind die Personen?

I. Das Einsetzungsverfahren:

Beim Einsetzungsverfahren löst man eine der beiden Gleichungen nach einer Variablen auf und setzt die entstandene Gleichung in die andere Gleichung ein. Es ist dabei egal, welche Gleichung nach welcher Variablen aufgelöst wird. Dann wird die so entstandene neue Gleichung nach der einzigen verbliebenen Variablen aufgelöst. Diese Lösung wird dann wieder in die erste Auflösung eingesetzt.

Beispiel 1:

Greifen wir das Beispiel 1 auf und lösen folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &(1) \quad 100m + b = 9000 \\ \text{und} \quad &(2) \quad 200m + b = 8000 \end{aligned}$$

Welche Zahlen für m und b erfüllen das Gleichungssystem?

Lösung:

Aus Gleichung (1) ergibt sich die Gleichung (1´): $b = 9000 - 100m$. Setzt man diese neue Gleichung in die Gleichung (2) ein, ergibt sich

$$200m + \underbrace{(9000 - 100m)}_{b} = 8000$$

$$\Leftrightarrow \quad 100m + 9000 = 8000$$

$$\Leftrightarrow \quad 100m = -1000$$

$$\Leftrightarrow \quad m = -10$$

Setzt man jetzt wieder $m = -10$ in Gleichung (1´) ein, ergibt sich b zu

$$\begin{aligned} b &= 9000 - 100m \\ &= 9000 - 100 \cdot \underbrace{(-10)}_{m} = 10.000 \end{aligned}$$

Probe:

(1) $100m + b = 100 \cdot (-10) + 10.000 = 9000$

(2) $200m + b = 200 \cdot (-10) + 10.000 = 8000$

Das Zahlenpaar $m = -10$ und $b = 10.000$ ist Lösung des Gleichungssystems

Die gesuchte lineare Funktionsgleichung $f(x) = m \cdot x + b$ lautet daher

$$f(x) = -10 \cdot x + 10.000$$

Beispiel 2:

Greifen wir das Beispiel 2 auf und lösen folgendes (nicht lineares) Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llrcl} & (1) & a \cdot b^{-19} & = & 265 \\ \text{und} & (2) & a \cdot b & = & 95 \end{array}$$

Welche Zahlen für a und b erfüllen das Gleichungssystem?

Lösung:

Aus Gleichung (2) ergibt sich die Gleichung (2´): $a = \frac{95}{b}$. Setzt man diese neue Gleichung in die Gleichung (1) ein, ergibt sich die Gleichung

$$a \cdot b^{-19} = \underbrace{\frac{95}{b}}_{a} \cdot b^{-19} = 265$$

Diese Gleichung lässt sich mit Hilfe der Potenzgesetze (siehe Grundlagen der Arithmetik) vereinfachen zu $95 \cdot b^{-20} = 265$. Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch 95, ergibt sich

$$\begin{array}{lrcll} & b^{-20} & = & \frac{265}{95} & \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{b^{20}} & = & \frac{265}{95} & \mid \cdot 95 \cdot b^{20} \\ \Leftrightarrow & 95 & = & 265 \cdot b^{20} & \mid : 265 \\ \Leftrightarrow & b^{20} & = & \frac{95}{265} & \end{array}$$

Diese Gleichung führt durch Anwendung der Wurzelgesetze (siehe Grundlagen der Arithmetik) zu

$$b = \sqrt[20]{\frac{95}{265}} = 0{,}95$$

Setzt man diese Lösung wieder in Gleichung (2´) ein, ergibt sich a zu $a = \frac{95}{b} = \frac{95}{0{,}95} = 100$

Es ist also $a = 100$ und $b = 0{,}95$. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet daher:

$$\mathbf{f(x) = 100 \cdot 0{,}95^{x}}$$

Auf eine Probe wird verzichtet.

Beispiel 3:

Gesucht sind die Lösungen des linearen Gleichungssystems

(1) $y - 2x = 3$
(2) $4x - y = -1$

Lösung:

Aus (1) folgt: $y = 3 + 2x$, eingesetzt in Gleichung (2) ergibt

$$
\begin{aligned}
& 4x - (3 + 2x) &= -1 \\
\Leftrightarrow\ & 4x - 3 - 2x &= -1 \\
\Leftrightarrow\ & x &= 1
\end{aligned}
$$

Die Lösung $x = 1$ eingesetzt in Gleichung $y = 3 + 2x$ ergibt $y = 3 + 2 \cdot 1 = 5$.

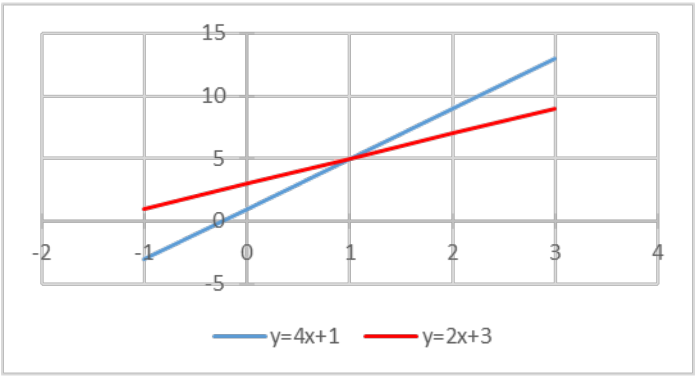
Probe:

(1) $y - 2x = 5 - 2 \cdot 1 = 3 = 3$ ist eine wahre Aussage.
(2) $5 = 3 + 2 \cdot 1 = 5$ ist eine wahre Aussage.

Das Zahlenpaar $x = 1$ und $y = 5$ ist eine Lösung des Gleichungssystems.

Geometrisch bedeutet das, dass sich die hinter den linearen Gleichungen verborgenen „Geraden" im Punkt $P(1 | 5)$ schneiden.

(1) $y - 2x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x + 3$
(2) $4x - y = -1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 4x + 1$



II. Das Additionsverfahren:

Beim **Additionsverfahren** werden die Gleichungen mit einer Zahl so multipliziert, dass bei der Addition dieser multiplizierten Gleichungen eine Variable „wegfällt". Dadurch entsteht eine Gleichung mit nur einer Variablen. Die Lösung dieser Gleichung wird dann in die andere Gleichung eingesetzt und diese neue Gleichung gelöst.

Beispiel 4:

Greifen wir nochmals das Beispiel 1 auf und lösen das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lll} & (1) & 100m + b = 9000 \\ \text{und} & (2) & 200m + b = 8000 \end{array}$$

mit Hilfe des **Additionsverfahrens**:

Lösung:

Multipliziert man Gleichung (1) mit der Zahl (-1) ergibt sich die Gleichung (1´) $-100m - b = -9000$ und damit das neue Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} (1') & -100m - b = -9000 \\ (2) & 200m + b = 8000 \end{array}$$

Addiert man jetzt die neue Gleichung (1') zur Gleichung (2) ergibt sich Gleichung

(2') $100m = -1000$

und daraus $m = -10$. Setzt man jetzt $m = -10$ in Gleichung (2) ein ergibt sich b zu

$b = 8000 - 200 \cdot (-10) = 10.000$

Die gesuchte lineare Funktionsgleichung $f(x) = m \cdot x + b$ lautet daher $f(x) = -10 \cdot x + 10.000$

Es wäre natürlich auch möglich, Gleichung (1) mit (-2) zu multiplizieren. Dann ergäbe sich die Gleichung (1') $-200m - 2b = -1800$ und damit das neue Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} (1') & -200m - 2b = -18000 \\ (2) & 200m + b = 8000 \end{array}$$

Addiert man jetzt die neue Gleichung (1') zur Gleichung (2) ergibt sich Gleichung

(2') $-b = -10.000$

und daraus $b = 10.000$. Setzt man jetzt $b = 10.000$ in Gleichung (2) ein ergibt sich die Gleichung

$200m + 10000 = 8000$ und daraus $m = -10$.

Die gesuchte lineare Funktionsgleichung $f(x) = m \cdot x + b$ lautet daher $f(x) = -10 \cdot x + 10.000$

Beispiel 5:

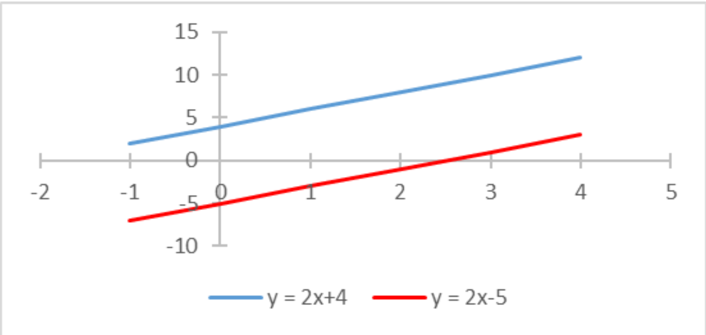
$$\begin{array}{lrl} (1) & 2y-4x = \ \ 8 & \mid \cdot 3 \\ (2) & 3y-6x = -15 & \mid \cdot (-2) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lr} (1') & 6y-12x = 24 \\ (2') & -6y+12x = 30 \end{array}\right\} +$$

0 = 54 Widerspruch ; das Gleichungssystem hat keine Lösung

Geometrisch bedeutet das, dass die hinter den linearen Gleichungen verborgenen „Geraden“ parallel verlaufen.

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2y-4x = \ \ 8 & \Leftrightarrow & y = 2x+4 \\ (2) & 3y-6x = -15 & \Leftrightarrow & y = 2x-5 \end{array}$$



Beispiel 6:

$$\begin{array}{lrl} (1) & 3x+6y = 12 & \mid \cdot (-5) \\ (2) & 5x+10y = 20 & \mid \cdot (3) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lr} (1') & -15x+30y = -60 \\ (2') & 15x-30y = \ \ 60 \end{array}\right\} +$$

0 = 0 ist eine allgemeingültige Gleichung; das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

Geometrisch bedeutet das, dass die hinter den linearen Gleichungen verborgenen „Geraden“ identisch sind.

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 3x+6y = 12 & \Leftrightarrow & y = -\frac{1}{2}x+2 \\ (2) & 5x+10y = 20 & \Leftrightarrow & y = -\frac{1}{2}x+2 \end{array}$$

Beispiel 7: Eine etwas seltsam anmutende Aufgabe:

Eine Mutter ist 21 Jahre älter als ihr Kind. In sechs Jahren wird die Mutter fünfmal so alt sein wie das Kind dann ist. Wo ist der Erzeuger des Kindes? Es hilft, wenn Sie das Alter der Mutter und des Kindes bestimmen.

Lösung:

Sei x = das Alter des Kindes in Jahren und
y = das Alter der Mutter in Jahren

Dann ergibt sich mit dem Zwischenschritt

x + 6 = Alter des Kindes in sechs Jahren
y + 6 = Alter der Mutter in sechs Jahren

das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & y & = & x+21 \\ (2) & y+6 & = & (x+6)\cdot 5 \end{array}$$

Aus Gleichung (1) folgt Gleichung (1‘) : $y - x = 21$

Aus Gleichung (2) folgt Gleichung (2‘) :

$$\begin{array}{lrcl} (2') & y+6 & = & (x+6)\cdot 5 \\ \Leftrightarrow & y+6 & = & 5x+30 \\ \Leftrightarrow & y-5x & = & 24 \end{array}$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\begin{array}{lrcll} (1') & y-x & = & 21 & \\ (2') & y-5x & = & 24 & \big|\cdot(-1) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lrcr} (1') & y-x & = & 21 \\ (2') & -y+5x & = & -24 \end{array}\right\} +$$

$$4x = -3$$

$4x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-3}{4}$ in Jahren, also $x = -9$ Monate.

Geht man von einer normalen Schwangerschaft aus, müsste der Erzeuger bei der Mutter sein.

5.4 lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen:

Ein lineares Gleichungssystem von drei und mehr Gleichungen mit drei und mehr Variablen sollte man so umformen, dass es *Dreiecksgestalt* (Zeilenstufenform) aufweist. Ein lineares Gleichungssystem in Dreiecksform hat folgendes Aussehen:

Lineares Gleichungssystem in Dreiecksform:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
(1) & x_1 & + & 2\cdot x_2 & - & x_3 & = & -1 \\
(2) & & & x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & 0 \\
(3) & & & & & 2\cdot x_3 & = & 2
\end{array}$$

Lineare Gleichungssysteme in Dreiecksform lassen sich – wie man sieht – besonders einfach lösen:

Aus Gleichung (3) ergibt sich sofort $x_3 = 1$, eingesetzt in Gleichung (2) ergibt sich x_2 zu $x_2 = -3$. Setzt man beide Lösungen in die erste Gleichung ein, ergibt sich x_1 zu $x_1 = 6$ und damit als Lösung L des Gleichungssystems das Zahlentripel $\mathbb{L} = \{x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\} = \{6\,;-3\,;1\}$.

Dieser Lösungsweg geht auf den deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß zurück und wird **Gauß-Algorithmus** oder **Gauß´sches Eliminationsverfahren** genannt.

Der Gauß-Algorithmus:

Jedes lineare Gleichungssystem (jede Matrix) lässt sich mit folgenden **Äquivalenzumformungen** auf Dreiecks- bzw. Stufenform bringen:

(1) Gleichungen miteinander vertauschen.
(2) eine Gleichung mit einer Zahl ungleich Null multiplizieren/dividieren.
(3) eine Gleichung durch die Summe/Differenz eines Vielfaches von ihr und einem Vielfachen einer **anderen** Gleichung ersetzen.
(4) Lösungsmenge durch schrittweises Auflösen nach den Variablen $x_m\,, x_{m-1}\,, \ldots, x_2\,; x_1$ bestimmen.

Beispiel 1:

Zu lösen ist folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
(1) & 3x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & = & -4 \\
(2) & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\
(3) & 1{,}5x_1 & + & 5x_2 & - & 5\cdot x_3 & = & -9
\end{array}$$

1. Schritt: Beseitigung von $3x_1$ in Zeile (2), dazu Zeile (2‘) = Zeile (2) – Zeile (1):

$$\left.\begin{array}{lrrrl} (1) & 3x_1 & +6x_2 & -2x_3 & =-4 \\ (2) & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & =0 \end{array}\right\} (2)-(1)$$

$$\begin{array}{lrrrl} (2') & & -4x_2 & +3x_3 & =4 \end{array}$$

2. Schritt: Beseitigung von $1{,}5x_1$ in Zeile (3), dazu Zeile (3‘) = 2 * Zeile (3) – Zeile (1):

$$\left.\begin{array}{lrrrl} (1) & 3x_1 & +6x_2 & -2x_3 & =-4 \\ (3) & 1{,}5x_1 & +5x_2 & -5\cdot x_3 & =-9 \end{array}\right\} 2\cdot(3)-(1)$$

$$\begin{array}{lrrrl} (3') & & 4x_2 & -8x_3 & =-14 \end{array}$$

Zwischenergebnis:

$$\begin{array}{lrrrl} (1) & 3x_1 & +6x_2 & -2x_3 & =-4 \\ (2') & & -4x_2 & +3x_3 & =4 \\ (3') & & 4x_2 & -8x_3 & =-14 \end{array}$$

3. Schritt: Beseitigung von $-4x_2$ in Zeile (2‘), dazu Zeile (3‘‘) = Zeile (3‘) + Zeile (2‘):

$$\left.\begin{array}{lrrl} (2') & -4x_2 & +3x_3 & =4 \\ (3') & 4x_2 & -8x_3 & =-14 \end{array}\right\} (3')\text{-}(2'):$$

$$\begin{array}{lrl} (3'') & -5x_3 & =-10 \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem in Dreiecksform:

$$\begin{array}{lrrrl} (1) & 3x_1 & +6x_2 & -2x_3 & =-4 \\ (2') & & -4x_2 & +3x_3 & =4 \\ (3'') & & & -5x_3 & =-10 \end{array}$$

Aus Gleichung (3) ergibt sich $x_3 = 2$, eingesetzt in Gleichung (2‘) ergibt sich x_2 zu $x_2 = 0{,}5$:

$$\begin{array}{lrl} & -4x_2 + 3\cdot 2 & = 4 \\ \Leftrightarrow & -4x_2 & =-2 \end{array}$$

Setzt man beide Lösungen in Gleichung (1) ein, ergibt sich

$$\begin{array}{lrl} (1) & 3x_1 + 6\cdot 0{,}5 - 2\cdot 2 & =-4 \\ \Leftrightarrow & 3x_1 + 1 & =-4 \\ \Leftrightarrow & x_1 & =-1 \end{array}$$

Das Zahlentripel $\mathbb{L} = \{x_1\,, x_2\,, x_3\} = \{-1; 0{,}5; 2\}$ ist Lösung des Gleichungssystems.

Probe Gleichung 1: $\underbrace{3\cdot(-1) + 6\cdot 0{,}5 - 2\cdot 2 = -4}_{\text{linke Seite}} = \underbrace{-4}_{\text{rechte Seite}}$ ist eine wahre Aussage

Probe Gleichung 2: $\underbrace{3\cdot(-1) + 2\cdot 0{,}5 + 2 = 0}_{\text{linke Seite}} = \underbrace{0}_{\text{rechte Seite}}$ ist eine wahre Aussage

Probe Gleichung 3: $\underbrace{1{,}5\cdot(-1) + 5\cdot 0{,}5 - 5\cdot 2 = -9}_{\text{linke Seite}} = \underbrace{-9}_{\text{rechte Seite}}$ ist eine wahre Aussage

Beispiel 2:

Zu lösen ist folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
(1) & 2x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & = & 8 \\
(2) & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\
(3) & x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & -10
\end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lrcrcrcrl}
(1) & 2x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & = & 8 & \mid \cdot 3 \\
(2) & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -2 & \mid \cdot 2 \\
(3) & x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & -10 & \mid \cdot 6
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{lrcrcrcr}
(1') & 6x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 24 \\
(2') & 6x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & -4 \\
(3') & 6x_1 & + & 18x_2 & - & 24x_3 & = & -60
\end{array}$$

1. Schritt: Beseitigung von $6x_1$ in Zeile (2‘) und Zeile (3‘),
dazu Zeile (2“) = Zeile (2‘) – Zeile (1‘)
und Zeile (3“) = Zeile (3‘) – Zeile (1‘)

Zwischenergebnis:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
(1') & 6x_1 & - & 3x_2 & + & 18x_3 & = & 24 \\
(2'') & & & 7x_2 & - & 14x_3 & = & -28 \\
(3'') & & & 21x_2 & - & 42x_3 & = & -84
\end{array}$$

2. Schritt: Beseitigung von $7x_2$ in Zeile (2“), dazu Zeile (3‘“) = Zeile (3“) -3*Zeile (2“):

$$\left.\begin{array}{lrcrcr}
(2'') & 21x_2 & - & 42x_3 & = & -84 \\
(3'') & 21x_2 & - & 42x_3 & = & -84
\end{array}\right\} (3‘)\text{-}3 \cdot (2‘):$$

$$(3‘“) \qquad 0 = 0 \quad \text{allgemeingültige Aussage}$$

Zwischenergebnis 2:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
(1') & 6x_1 & - & 3x_2 & + & 18x_3 & = & 24 \\
(3''') & & & & & 0 & = & 0
\end{array}$$

Da sich hier eine allgemeingültige Gleichung ergibt, kann ein Wert beliebig gewählt werden.

Es ist $\quad 7x_2 - 14x_3 = -28$

$\Leftrightarrow \quad x_2 = -4 + 2x_3$.

Wählt man jetzt eine x-beliebige reelle Zahl k für x_3, z.B. $x_3 = k\ ;\ k \in \mathbb{R}$, ergibt sich x_2 zu $x_2 = -4 + 2k$, eingesetzt in Gleichung (1) ergibt

$$\begin{aligned}
2x_1 - (-4 + 2k) + 6k = 8 \; &\Leftrightarrow \; 2x_1 + 4 - 2k + 6k = 8 \\
&\Leftrightarrow \; 2x_1 + 4 + 4k = 8 \\
&\Leftrightarrow \; 2x_1 = 4 - 4k \\
&\Leftrightarrow \; x_1 = 2 - 2k
\end{aligned}$$

allgemeine Lösung: Das Zahlentripel $\mathbb{L} = \{2 - 2k\ ;\ -4 + 2k\ ;\ k\}$ ist Lösung des Gleichungssystems

einzelne Lösungen:

für $k = 1$: $\mathbb{L} = \{0\,;-2\,;1\}$

für $k = -2$: $\mathbb{L} = \{6\,;-8\,;-2\}$ usw.

Probe für $k = 1$:

$$\begin{array}{ll}(1) & 2\cdot 0 \;-(-2) \;+\; 6\cdot 1 \;=\; 8 \\ (2) & 3\cdot 0 \;+2\cdot(-2)+\; 2\cdot 1 \;=-2 \\ (3) & 0 \;+3\cdot(-2)-\; 4\cdot 1 \;=-10\end{array}$$

Beispiel 3:

Für welche Werte von a besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl}(1) & 2x_1 - x_2 + a\cdot x_3 & = & 2-2a \\ (2) & 2x_2 + x_3 & = & a \\ (3) & x_1 + 6x_2 + 4x_3 & = & 2+2a\end{array}$$

keine, genau eine Lösung?

Lösung:

$$\begin{array}{lrcll}(1) & 2x_1 - x_2 + a\cdot x_3 & = & 2-2a & \\ (2) & 2x_2 + x_3 & = & a & \\ (3) & x_1 + 6x_2 + 4x_3 & = & 2+2a & \mid \cdot 2\end{array}$$

1. Schritt: Beseitigung von x_1 in Zeile (3), dazu Zeile (3‘) = Zeile (3) - Zeile (1):

$$\left.\begin{array}{lrcl}(1) & 2x_1 - x_2 + a\cdot x_3 & = & 2-2a \\ (3) & 2x_1 + 12x_2 + 8x_3 & = & 4+4a\end{array}\right\}\ (3)-(1)$$

$$(3‘) \qquad 13x_2 + (8-a)x_3 = 2+6a$$

Zwischenergebnis 1:

$$\begin{array}{lrcll}(1) & 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 & = & -4 & \\ (2) & 2x_2 + x_3 & = & a & \mid \cdot 13 \\ (3') & 13x_2 + (8-a)x_3 & = & 2+6a & \mid \cdot\ 2\end{array}$$

Zwischenergebnis 2:

$$\begin{array}{lrcl}(1) & 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 & = & -4 \\ (2') & 26x_2 + 13x_3 & = & 13a \\ (3'') & 26x_2 + (16-2a)x_3 & = & 4+12a\end{array}$$

2. Schritt: Beseitigung von $26x_2$ in Zeile (2‘), dazu Zeile (2“) = Zeile (3“) - Zeile (2‘):

$$\left.\begin{array}{lrcl}(2') & 26x_2 + 13x_3 & = & 13a \\ (3'') & 26x_2 + (16-2a)x_3 & = & 4+12a\end{array}\right\}\ (3'')-(2')$$

$$(2“) \qquad (16-2a)x_3 - 13x_2 = 4+12a-13a$$

Aus Gleichung (2“) folgt:

$$
\begin{aligned}
& (16-2a)x_3 - 13x_2 = 4 + 12a - 13a \\
\Leftrightarrow \quad & (16-2a-13)x_3 = 4-a \\
\Leftrightarrow \quad & (3-2a)x_3 = 4-a
\end{aligned}
$$

Für $(3-2a) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{3}{2}$ gibt es genau eine Lösung: $x_3 = \frac{4-a}{(3-2a)}$

Für $(3-2a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$ gibt es keine Lösung, denn

$$
\begin{aligned}
& (3-2a)x_3 = 4-a \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = \frac{5}{2} \quad \text{ist eine falsche Aussage}
\end{aligned}
$$

Beispiel 4:

Vater und Sohn sind zusammen 109 Jahre. Sohn und Enkel des Vaters sind zusammen 56 Jahre, der Vater und der Sohn sind zusammen 85 Jahre. Wie alt sind die Personen?

Lösung:

Führt man zur Lösung folgende Variablen ein

x = Alter des Vaters
y = Alter des Sohnes
z = Alter des Enkels

ergibt sich das Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{llllll}
(1) & x & & +z & = & 85 \\
(2) & & y & +z & = & 56 \\
(3) & x+ & y & & = & 109
\end{array}
$$

1. Schritt: Beseitigung von x in Zeile (3), dazu Zeile (3‘) = Zeile (3) - Zeile (1):

$$
\begin{array}{llllll}
(1) & x & & +z & = & 85 \\
(2) & & y & +z & = & 56 \\
(3') & & y & -z & = & 24
\end{array}
$$

2. Schritt: Beseitigung von y in Zeile (2), dazu Zeile (2‘) = Zeile (3‘) - Zeile (2):

$$
\begin{array}{llllll}
(1) & x & & +z & = & 85 \\
(2') & & y & +z & = & 56 \\
(3') & & & -2z & = & -32
\end{array}
$$

Aus (3‘) folgt: $z = 16$, eingesetzt in (2‘) und (1) ergibt $y = 40$ und $x = 69$.

Ergebnis: Der Vater ist also 69 Jahre alt, sein Sohn 40 Jahre und der Enkel 16 Jahre.

5.5 Exkurs: Nichtlineare Gleichungssysteme:

In Sonderfällen lässt sich das beschriebene Einsetzungsverfahren auch auf nichtlineare Gleichungssysteme anwenden.

Beispiel 1:

Lösen Sie das (nicht lineares) Gleichungssystem:

(1) $a \cdot b^{-19} = 265$
(2) $a \cdot b = 95$

Lösung:

Aus Gleichung (2) ergibt sich die Gleichung (2´): $a = \frac{95}{b}$. Setzt man diese neue Gleichung in die Gleichung (1) ein, ergibt sich die Gleichung

$$a \cdot b^{-19} = \underbrace{\frac{95}{b}}_{a} \cdot b^{-19} = 265$$

Diese Gleichung lässt sich mit Hilfe der Potenzgesetze (siehe Grundlagen der Arithmetik) vereinfachen zu $95 \cdot b^{-20} = 265$. Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch 95, ergibt sich

$$\begin{aligned} & b^{-20} = \frac{265}{95} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{b^{20}} = \frac{265}{95} \qquad \Big| \cdot 95 \cdot b^{20} \\ \Leftrightarrow\quad & 95 = 265 \cdot b^{20} \qquad \Big| : 265 \\ \Leftrightarrow\quad & b^{20} = \frac{95}{265} \end{aligned}$$

Diese Gleichung führt durch Anwendung der Wurzelgesetze (siehe Grundlagen der Arithmetik) zu

$$b = \sqrt[20]{\frac{95}{265}} = 0{,}95$$

Setzt man diese Lösung wieder in Gleichung (2´) ein, ergibt sich a zu $a = \frac{95}{b} = \frac{95}{0{,}95} = 100$

Es ist also $a = 100$ und $b = 0{,}95$.

Beispiel 2:

Lösen Sie das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} (1) & x + 8y - 3 = -3 + 3y \\ (2) & x^2 + 10y - 3 = 0 \end{array}$$

Lösung:

Aus Gleichung (1) folgt: $x = -5y$.

In Gleichung (2) eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} & \underbrace{(-5y)^2}_{x} + 10y - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 25y^2 + 10y - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & y^2 + \frac{2}{5}y - \frac{3}{25} = 0 \end{aligned}$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} y_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= -\frac{1}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{3}{25}} \\ &= -\frac{1}{5} \pm \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Es ist also $y_1 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

oder $y_2 = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5} = -\frac{3}{5} = -0{,}6$

Diese Lösungen eingesetzt in die Gleichung $x = -5y$ ergibt:

$x_1 = -5 \cdot \frac{1}{5} = -1$ und

$x_2 = -5 \cdot \frac{-3}{5} = 3$

Insgesamt ergeben sich als Lösung die Zahlenpaare $(-1 \mid 0{,}2)$ oder $(3 \mid -0{,}6)$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{(-1 \mid 0{,}2); (3 \mid -0{,}6)\}$

Kapitel 6: Folgen und Reihen:

Einer der wichtigsten Begriffe in der Analysis ist der Begriff der **Zahlenfolge**, kurz Folge. Mit Hilfe von Folgen lässt sich der Begriff des **Grenzwertes** exakt definieren und alle wichtigen Konzepte der Analysis wie **Stetigkeit** und **Differenzierbarkeit** (Ableitung) einführen.

Salopp gesagt ist eine Zahlenfolge nichts anderes als eine geordnete Aneinanderreihung von Zahlen, z.B. 2, 3, 5, 7, 9 … Sind diese Zahlen zeitlich geordnet, spricht man in der Statistik von einer Zeitreihe. Eine solche Zeitreihe ergibt sich beispielsweise, wenn ein Unternehmen monatlich seine Umsatzzahlen notiert. Hier wird jedem Monat eine reelle Zahl zugeordnet. So entsteht eine Folge von Zahlen.

Beispiel 1: Zeitreihe

Monat n	Jan	Feb	…	Dez
Umsatz U_n (in Mio €)	13,75	18,29	…	16,14

Ein anderes Praxisbeispiel wäre z.B. die jährlichen Kontostände eines Sparbuches bei regelmäßigen Einzahlungen. Auch hier wird jedem Zeitpunkt (Jahr) eine Zahl zugeordnet.

Beispiel 2: Kontostand

Jahr n	1	2	3	4	5
Kontostand K_n	100	110	120	130	140

Allerdings ist nicht jede Aneinanderreihung von Zahlen eine Folge im *mathematischen Sinne*. Eine mathematische Folge liegt nur dann vor, wenn es zwischen den Zahlen der Folge eine Gesetzmäßigkeit gibt, sozusagen eine „Formel“, mit der man jedes Glied der Folge bestimmen kann. So ist die Zeitreihe aus Beispiel 1 keine mathematische Folge, die Kontostände in Beispiel 2 dagegen schon, denn hier lässt sich der Kontostand mit Hilfe der Gleichung $K_n = 100 + (n-1) \cdot 10$ berechnen.

Folgen sind Funktionen mit den natürlichen Zahlen als Definitionsbereich. Mathematisch exakt ist eine Zahlenfolge wie folgt definiert:

6.1 Definition Folge:

Eine Folge a ist eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet.

kurz: $$\mathbf{a}: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$$
$$\mathbf{a}: \mathbf{n} \mapsto \mathbf{a_n}$$

Die Funktionswerte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ heißen **Glieder** der Folge. n heißt **Index** der Zahl a_n, die Zahl a_n heißt n−tes **Folgenglied** dieser Zahlenfolge.

Für eine Folge schreibt man oft $(a_n)_{n \geq 1}$ oder kurz (a_n) oder einfach nur a_n.

Eine Folge a_n kann vorgegeben werden

- **aufzählend** durch Aufzählen der Folgeglieder $a_1, a_2, a_3, \ldots$
- **rekursiv** durch Angabe einer Gleichung, mit der man aus einem Folgeglied das darauffolgende Folgeglied berechnen kann, z.B. $a_{n+1} = a_n + 1$.

  rekursiv (lat.): zurückgehend bis zu bekannten Werten.
- **explizit** durch Angabe einer Funktionsgleichung in Abhängigkeit von n, z.B. $a_n = 2n$

  explizit (lat.): erklärt, ausführlich dargestellt.

Beispiel 1: no name Folge mit $D_f = \mathbb{N}$:

aufzählend: $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 10, \ldots$ kurz: $(a_n)_{n \geq 1} = 1, 4, 7, 10, \ldots$

rekursiv: $a_{n+1} = a_n + 3$ mit $a_1 = 1$

explizit: $a_n = 3n - 2$

Beispiel 2: Folge der **natürlichen Zahlen** mit $D_f = \mathbb{N}_0$:

aufzählend: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \ldots$ kurz: $(a_n)_{n \geq 1} = 1, 2, 3, \ldots$

rekursiv: $a_{n+1} = a_n + 1$ mit $a_1 = 1$

explizit: $a_n = n$, (wenn die Nummerierung mit n = 1 begonnen wird)

Beispiel 3: **Fibonacci - Zahlen** (Leonard von Pisa):

Eine interessante Folge sind die rekursiv definierten Fibonacci - Zahlen:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \text{mit} \quad a_0 = a_1 = 1$$

Diese Folge liefert sukzessive die Zahlen

$$a_2 = a_1 + a_0 = 1 + 1 = 2$$
$$a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$$
$$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8$$
$$a_6 = a_5 + a_4 = 8 + 5 = 13$$

Fibonacci-Folge: $(a_n)_{n \geq 0} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Wie zu erkennen ist, ergibt sich ab dem dritten Glied das nächste Folgeglied aus der Addition der beiden vorausgegangenen Glieder.

Die n-te Fibonacci-Zahl lässt sich explizit mit folgender Formel berechnen:

$$\boxed{\mathbf{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}}$$

Das Interessante an der Formel ist, dass sie die irrationale Zahl Wurzel 5 enthält, aber trotzdem nur natürliche Zahlen als Ergebnis liefert.

Rechenbeispiele:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2} - \frac{(1-\sqrt{5})^2}{2^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2^2 \cdot \sqrt{5}} \cdot \left((1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^2\right)$$

$$= \frac{1}{4 \cdot \sqrt{5}} \cdot \left((1+2\sqrt{5}+5) - (1+2\sqrt{5}+5)\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot \left(4\sqrt{5}\right) = 1$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\frac{(1+\sqrt{5})^3}{2^3} - \frac{(1-\sqrt{5})^3}{2^3}\right]$$

$$= \frac{1}{2^3 \cdot \sqrt{5}} \cdot \left((1+4\sqrt{5}+30+20\sqrt{5}+25) - (1-4\sqrt{5}+30-20\sqrt{5}+25)\right)$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{5}} \cdot \left(16\sqrt{5}\right) = 2$$

$$a_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\frac{(1+\sqrt{5})^4}{2^4} - \frac{(1-\sqrt{5})^4}{2^4}\right]$$

$$= \frac{1}{2^4 \cdot \sqrt{5}} \cdot \left((1+4\sqrt{5}+30+20\sqrt{5}+25) - (1-4\sqrt{5}+30-20\sqrt{5}+25)\right)$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{5}} \cdot \left(48\sqrt{5}\right) = 3$$

Beispiel 4: $a_n = \frac{n-1}{n}$ liefert die Zahlenfolge $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \ldots$

Beispiel 5: $a_n = \frac{1}{n}$ liefert die Zahlenfolge $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$. Sie heißt **Nullfolge**.

Beispiel 6: $a_n = (-3)^n$ liefert die Zahlenfolge $-3; 9; -27; 81; \ldots$.

Bemerkung: Es ist manchmal üblich, das erste Glied einer Folge auch mit a_0 zu bezeichnen, d.h. die Nummerierung bei der Zahl 0 zu beginnen:

Beispiel 7: Gegeben sei die Zahlenfolge **1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , . . .**

a) Wie lautet die rekursive Formel dieser Folge?
b) Wie lautet die explizite Formel dieser Folge?

Lösung:

a) rekursiv: $\mathbf{a_{n+1} = 2a_n}$ **mit** $\mathbf{a_1 = \frac{1}{2}}$

b) explizit: $\mathbf{a_n = 2^n}$ **wenn** $\mathbf{n = 0, 1, 2, \ldots}$

oder $\mathbf{a_n = 2^{n-1}}$ **wenn** $\mathbf{n = 1, 2, 3, \ldots}$

Hinweis: Wird eine Folge durch Aufzählen der Folgeglieder vorgegeben, so ist deren Bildungsgesetz nicht unbedingt eindeutig oder identisch!

Beispiel 1: Gegeben seien die Anfangsglieder $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$ einer Folge.

Die Folgen $a_n = n+1$ bzw. $b_n = n^3 - 3n^2 + 3n + 1$ besitzen allerdings beide die Anfangsglieder 1, 2, 3.

Beispiel 2: Gegeben seinen folgende Anfangsglieder einer Folge: $0, 3, 8, 15, \ldots$

Betrachtet man die Differenz der Folgeglieder, ergibt sich die Zahlenfolge $3, 5, 7, \ldots$. Zu jedem Folgeglied a_n wird die nächstfolgende ungerade Zahl addiert. Die weiteren Folgeglieder wären dann

$$0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, \ldots$$

Als Bildungsgesetz ergibt sich demnach: $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, $n \geq 1$.

Ein anderes Bildungsgesetz wäre $a_n = n^2 - 1$, $n \geq 1$.

wichtige Zahlenfolgen sind:

(1) $a_n = 2n$ Sie liefert alle **geraden** Zahlen
(2) $a_n = 2n - 1$ Sie liefert alle **ungeraden** Zahlen

6.2 Definition Reihe:

Addiert man die Glieder einer gegeben Zahlenfolge a_n, so ergeben sich sogenannte Partialsummen („Teilsummen“) S_n , die wiederum eine Zahlenfolge bilden. Die Folge dieser Partialsummen wird **Reihe** genannt. Reihen sind die Grundlage in der Finanzmathematik.

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Definition Reihe:

Eine Reihe S_n ist die Summe der Folgeglieder einer Folge a_n.

$$\mathbf{S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}_{n-\text{Summanden}}}$$

S_n wird auch n-te **Partialsumme** genannt.

Mit Hilfe des Summenzeichens lässt sich eine Reihe kürzer schreiben:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Nummeriert man das erste Glied einer Folge mit a_0, ergibt sich die Reihe zu

$$S_n = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{(n+1)-\text{Summanden}} = \sum_{i=0}^{n} a_i \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Mathematisch ist es egal, ob man das erste Glied einer Folge mit a_0 oder a_1 beginnen lässt. In der Mathematik nummeriert man das erste Folgeglied üblicherweise mit a_1, in der Finanzmathematik dagegen mit a_0 und – so es denn Geldbeträge sind – bezeichnet das erste Folgeglied als Startkapital.

Beispiel 1:

Gegeben ist die Folge $a_n = 2 \cdot n$, $(n = 1, 2, \ldots)$, also die Folge der geraden Zahlen. Berechnen Sie die 4te Partialsumme, also die Summe der ersten vier geraden Zahlen S_4.

$$S_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$$

Beispiel 2:

In einem Saal befinden sich in der ersten Reihe 30 Stühle. In jeder weiteren Reihe vermehrt sich die Anzahl der Stühle um 5. Wie viele Stühle befinden sich in den ersten 5 Reihen?

Folgeglieder: $a_0 = 30$, $a_1 = 35$, $a_2 = 40$ usw.

In den ersten fünf Reihen befinden sich daher insgesamt 200 Stühle.

$$S_4 = \sum_{i=0}^{4} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$= 30 + 35 + 40 + 45 + 50$$

Beispiel 3:

Berechnen Sie die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen S_{100}, also die Summe

$$S_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{100} = \sum_{i=1}^{100} a_i$$
$$= 1 + 2 + \ldots + 100 = ?$$

Diese spezielle Reihe ist eng mit dem Namen Carl Friedrich Gauß verbunden.

Der Legende nach hat der junge Carl Friedrich Gauß (1775 - 1855) im Alter von neun Jahren diese dann nach ihm benannte Summenformel wiederentdeckt, als er in der Grundschule die Aufgabe zu lösen hatte, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Kaum gestellt, gab Gauß die richtige Antwort: *Die Summe ist 5050*.

Carl Friedrich Gauß:
(1775 – 1855)

Wie konnte er so schnell die Lösung finden?

6.3 Beschränktheit und Monotonie von Folgen:

6.31 Beschränktheit:

Eine Folge $(a_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ heißt

nach oben beschränkt,	wenn es für alle Werte der Folge eine Zahl S gibt, für die gilt: $a_n \leq S$
nach unten beschränkt,	wenn es für alle Werte der Folge eine Zahl s gibt, für die gilt: $a_n \geq s$
beschränkt,	wenn die Folge nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiele:

(1) Die Folge $a_n = 3 - 2n$, $n \in \mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt, denn die Folgeglieder können nicht größer als 3 sein.

(2) Die Folge der natürlichen Zahlen ist nach unten beschränkt, aber nicht nach oben.

(3) Die Folge $a_n = -5 + 2n^2$, $n \in \mathbb{N}$ ist nach unten beschränkt, denn die Folgeglieder können nicht kleiner als 5 sein.

(4) Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ ist beschränkt, denn die Folgeglieder können nicht größer eins sein und kleiner Null werden. Es gilt: $0 < a_n \leq 1$

(5) Die Folge $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ ist beschränkt. Es gilt: $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$

6.32 Monotonie:

Eine Folge $(a_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ heißt

monoton wachsend, wenn für alle Werte der Folge gilt:

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{bzw.} \quad a_{n+1} - a_n \geq 0$$

monoton fallend, wenn für alle Werte der Folge gilt:

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{bzw.} \quad a_{n+1} - a_n \leq 0$$

Wenn jedes Folgeglied echt größer (kleiner) als sein Vorgänger ist, so spricht man von **streng monoton wachsenden** (fallenden) Folgen.

Beispiele:

(1) Die Folge $a_n = 2^{n-1}$ ist eine streng monoton wachsende Folge, denn für alle Folgeglieder gilt:

$$a_{n+1} = 2^n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2 \cdot a_n > a_n$$

(2) Die Folge $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ ist eine streng monoton wachsende Folge, denn es gilt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)\cdot(n+1) - n\cdot(n+2)}{(n+2)\cdot(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)\cdot(n+1)} \\ &= \frac{1}{(n+2)\cdot(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

Es ist daher $a_{n+1} - a_n > 0$ für alle n .

(3) Die Folge $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$ ist eine streng monoton fallende Folge, denn es gilt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}} - \frac{2^{n+1}}{3^n} = \frac{2^{n+2} - 2^{n+1}\cdot 3}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2^2\cdot 2^n - 2^1\cdot 2^n\cdot 3}{3\cdot 3^n} = \frac{2^n\cdot(2^2 - 2^1\cdot 3)}{3\cdot 3^n} \\ &= \frac{2^n\cdot(4-6)}{3\cdot 3^n} = \frac{2^n\cdot(-2)}{3^n} \\ &= -2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n < 0 \end{aligned}$$

Es ist daher $a_{n+1} - a_n < 0$ für alle n.

(3) Die Folge $a_n = (-3^n)$ ist die alternierende Folge $-3; 9; -27; 81; -243; \ldots$. Sie ist weder monoton wachsend noch monoton fallend, also nicht monoton.

6.4 arithmetische Folge und Reihe:

Spezielle Folgen und Reihen sind die arithmetische sowie die geometrische Folge bzw. Reihe. Insbesondere die geometrische Reihe bildet die zentrale Grundlage für finanzmathematische Überlegungen.

6.4.1 arithmetische Folge:

Eine Folge a_n heißt **arithmetische Folge**, wenn die **Differenz d** zweier aufeinander folgender Glieder *konstant* ist, wenn also gilt:

$$\mathbf{d = (a_{n+1} - a_n) = const.}$$

Eine arithmetische Folge hat in aufzählenderweise die Form

$$\mathbf{a_1 , a_1 + d , a_1 + 2 \cdot d , a_1 + 3 \cdot d , ... , a_1 + (n-1) \cdot d} \;\; ; \; (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Das n-te Folgeglied berechnet sich

- **explizit** mit der Formel:

$$\boxed{\mathbf{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d} \;\; ; \; (n = 1, 2, 3, \ldots)}$$

Hinweis: Wird das erste Folgeglied mit a_0 bezeichnet, ergibt sich das n-te Folgeglied zu

$$a_n = a_0 + n \cdot d \; , \; (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

- **rekursiv** mit der Formel:

$$\boxed{\mathbf{a_{n+1} = a_n + d}}$$

Hinweis: Man kommt von einem Folgeglied zum nächsten, indem man immer dieselbe Zahl d addiert.

Anwendungen: **lineare Verzinsung** (ohne Zinseszins)
lineare Abschreibung

Eigenschaften der arithmetischen Folge:

(1) Für $n \geq 2$ lässt sich ein Folgeglied a_n als arithmetisches Mittel der beiden Nachbarglieder berechnen, denn aus $a_{n-1} = a_1 + (n-2) \cdot d$ und $a_{n+1} = a_1 + n \cdot d$ folgt:

$$\begin{aligned} a_{n-1} + a_{n+1} &= a_1 + (n-2) \cdot d + a_1 + n \cdot d \\ &= 2a_1 + nd - 2d + nd = 2a_1 + 2nd - 2d \\ &= 2 \cdot (a_1 + nd - d) = 2 \cdot (a_1 + (n-1) \cdot d) \\ &= 2a_n \end{aligned}$$

Es ist also $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$ und daher $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

(2) Zwischen zwei Gliedern a_r und a_s einer arithmetischen Folge besteht die Beziehung

$$a_s = a_r + (s-r) \cdot d$$

Beispiel 1:

Gegeben sei die Zahlenfolge $a_1 = 100$, $a_2 = 103$, $a_3 = 106$, $a_4 = 109$, $a_5 = 112$, $\ldots$. Zu bestimmen ist

a) das 21 Folgeglied
b) mit Hilfe von a_5 das 12te Folgeglied.

Lösung:

Das ist eine arithmetische Folge mit $a_1 = 100$ und $d = 3$.

zu a) das 21 Folgeglied ergibt sich mit Hilfe der Formel $a_n = 100 + 3(n-1)$ zu

$$a_n = 100 + 3(n-1) = 100 + 3 \cdot (21-1) = 160$$

zu b) mit Hilfe von $a_s = a_r + (s-r) \cdot d$; $s = 12; r = 7; d = 3$ ergibt sich a_{12} zu

$$a_{12} = a_5 + (12-5) \cdot 3 = 112 + 21 = 133$$

Probe: $a_{12} = 100 + 3(n-1) = 100 + 3 \cdot 11 = 133$

Beispiel 2:

Gegeben sind die beiden Folgeglieder $a_5 = 8$ und $a_{21} = 56$ einer arithmetischen Folge. Bestimmen Sie das Bildungsgesetz dieser Folge.

Lösung: Zur Bestimmung des Bildungsgesetzes $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ werden a_1 und d benötigt. Da es sich um eine arithmetische Folge handelt, besteht zwischen $a_5 = 8$ und $a_{21} = 56$ die Beziehung $a_s = a_r + (s-r) \cdot d$ mit $s = 21$ und $r = 5$. Es ist also

$$56 = 8 + 16 \cdot d \quad \Leftrightarrow \quad d = 3$$

$a_5 = 8$ ergibt sich mit dem Bildungsgesetzt zu $a_5 = a_1 + (5-1) \cdot d$. Es ist also

$$8 = a_1 + (5-1) \cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = -4$$

Das Bildungsgesetz lautet daher $a_n = -4 + (n-1) \cdot 3$

Hinweis: $(n-1)$ ergibt sich immer aus der Differenz der Indices der gegebenen Folgeglieder a_s und a_r

6.4.2 arithmetische Reihe:

Eine Reihe ist die Summe der Folgeglieder. Für die (endliche) arithmetische Folge ergibt sich daher die allgemeine arithmetische Reihe S_n zu

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)\cdot d) + (a_1 + n\cdot d) = \sum_{i=1}^{n} (a_1 + (i-1)\cdot d)$$

Der Wert einer arithmetischen Reihe lässt sich mit folgenden Summenformeln berechnen:

Summenformel 1a: $\mathbf{S_n = \dfrac{n\cdot[2\cdot a_1 + (n-1)\cdot d]}{2}}$

Summenformel 1b: $\mathbf{S_n = \dfrac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}}$

Beispiel 1: Berechnen Sie die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 100

$$S_{100} = 1 + 2 + \ldots + 100 = ? = \sum_{i=1}^{100} i$$

Lösung:

mit Formel 1a: $a_1 = 1$, $a_n = 100$, $d = 1$

$$S_n = \frac{n\cdot[2\cdot a_1 + (n-1)\cdot d]}{2} = \frac{100\cdot[2\cdot 1 + 99\cdot 1]}{2} = \frac{100\cdot 101}{2} = 5050$$

mit Formel 1b: $a_1 = 1$, $a_n = 100$, $n = 100$

$$S_n = \frac{n\cdot[a_1 + a_n]}{2} = \frac{100\cdot[1 + 100]}{2} = \frac{100\cdot 101}{2} = 5050$$

Für diese wohl bekannteste arithmetische Reihe, bei der alle natürlichen Zahlen von 1 bis n addiert werden müssen, hat Carl Friedrich Gauß bereits in jungen Jahren folgende Formel gefunden:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\cdot[n+1]}{2}$$

Ähnliche Sonderfälle für arithmetische Reihen sind

- die Reihe der geraden Zahlen $S_n = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2\cdot n = n\cdot[n+1]$
- die Reihe der ungeraden Zahlen $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2\cdot n - 1) = n^2$
- die Reihe der Quadratzahlen $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)(2n+1)$
- die Reihe der Kubikzahlen $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}\cdot n^2\cdot(n+1)^2$

(Beweise jeweils mit Vollständiger Induktion)

Nach der obigen Summenformel für die Reihe der ungeraden Zahlen lässt sich somit jede Quadratzahl als Summe der ersten n ungeraden Zahlen und damit als Reihe darstellen:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 2^2 &= 1+3 \\ 3^2 &= 1+3+5 \\ 4^2 &= 1+3+5+7 \\ &\vdots \\ n^2 &= 1+3+5+7+\ldots+(2n-1) \end{aligned}$$

Beispiel 2:

Für die Zahlenfolge $100\,;103\,;106\,;109\,;\ldots$ mit dem Bildungsgesetz $a_n = 100 + 3(n-1)$ ist die Summe der ersten 121 Folgeglieder zu berechnen:

$$S_{121} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{121} = \frac{n \cdot [\,2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\,]}{2} = \frac{121 \cdot [\,2 \cdot 100 + 120 \cdot 3\,]}{2}$$

$$= 33.880 \text{ €}$$

Mit der Formel $S_n = \dfrac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$ ergibt sich ebenfalls $S_n = \dfrac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = \dfrac{121}{2} \cdot 560 = 33.880$

Hinweis:

In manchen Büchern finden sich für die Summe der ersten Glieder einer arithmetischen Folge die Summenformeln

Summenformel: $$S_n = \frac{(n+1) \cdot [\,2 \cdot a_0 + n \cdot d\,]}{2} \qquad \text{(Formel 2a)}$$

bzw. $$S_n = \frac{(n+1) \cdot (a_0 + a_n)}{2} \qquad \text{(Formel 2b)}$$

Der Unterschied besteht „nur“ darin, dass in den Formeln 1a) und 1b) das erste Glied der Folge mit a_1 bezeichnet wurde, in den Formeln 2a) und 2b) dagegen mit a_0.

Die Summe S_n von i = 1 bis n hat n-Summanden
Die Summe S_n von i = 0 bis n hat (n+1) Summanden

$$S_n = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{(n+1)-\text{Summanden}}$$

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{n-\text{Summanden}}$$

Damit man mit Formel 2a) auf das gleiche Ergebnis kommt wie mit Formel 1a) muss man also von i = 0 bis i = (n - 1) aufsummieren, um die gleiche Anzahl von Summanden zu erhalten.

Für das Beispiel ergibt sich dann mit $a_0 = 100$, $d = 3$ und $n = 120$ ebenfalls

$$S_{121} = \underbrace{a_0 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{120}}_{121\,\text{Summanden}} = \frac{(n+1)\cdot\left[\,2\cdot a_0 + n\cdot d\,\right]}{2}$$

$$= \frac{(120+1)\cdot\left[\,2\cdot 100 + 120\cdot 3\,\right]}{2}$$

$$= \frac{121\cdot 560}{2}$$

Hier zeigt sich, dass die sture Anwendung einer Formel nicht sinnvoll ist.

Beispiel 3:

Nach Abschluss Ihres Studiums bewerben Sie sich bei Firma A. Diese bietet Ihnen ein Jahresanfangsgehalt von 36.000 € Netto an und garantiert Ihnen eine jährliche Gehaltserhöhung von 2000 € Netto.

a1) Wie hoch ist Ihr Jahresgehalt im 10. Jahr?
a2) Welche Gehaltssumme haben Sie in diesen 10 Jahren insgesamt bekommen?

Lösung:

a1) In 10 Jahren bekommen Sie 9 Gehaltserhöhungen á 2000 €. Ihr Gehalt im 10ten Jahr beträgt daher $a_{10} = 36.000 + 9\cdot 2000 = 54.000$ €

mit Formel: $a_{10} = a_1 + (n-1)\cdot d = 36.000 + (10-1)\cdot 2000 = 54.000$ €

a2)

$$S_{10} = 36.000 + 38.000 + 54.000 = \frac{n}{2}\cdot(2\cdot a_1 + (n-1)\cdot d)$$

$$= \frac{10}{2}\cdot(2\cdot 36.000 + 9\cdot 2000) = 450.000\ €$$

6.5 geometrische Folge und Reihe:

6.5.1 geometrische Folge:

Eine Folge a_n heißt **geometrische Folge**, wenn der **Quotient q** zweier aufeinander folgender Glieder *konstant* ist, wenn also gilt:

$$\mathbf{q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = const}$$

Eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied $\mathbf{a_1}$ und dem konstanten Quotienten $\mathbf{q}$ hat in aufzählenderweise die Form

$$\mathbf{a_1 \,;\, a_1 \cdot q \,;\, a_1 \cdot q^2 \,;\, a_1 \cdot q^3 \,;\, \ldots \,;\, a_1 \cdot q^{n-1} \,;\, \ldots}$$

Das n-te Folgeglied berechnet sich

- **explizit** mit der Formel:

$$\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}; \; (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Hinweis: Wird das erste Folgeglied mit a_0 bezeichnet, ergibt sich das n-te Folgeglied zu

$$a_n = a_0 \cdot q^n \text{ , } n = (0, 1, 2, \ldots)$$

- **rekursiv** mit der Formel:

$$\mathbf{a_{n+1} = a_n \cdot q}$$

Hinweis: Man kommt von einem Folgeglied zum nächsten, indem man immer mit derselben Zahl q multipliziert.

Anwendungen: **exponentielle Verzinsung** („Zinseszins“)
geometrisch-degressive Abschreibung

Eigenschaften der geometrischen Folge:

(1) ist $q < 0$ wechseln die Folgeglieder ständig das Vorzeichen und sind damit eines der wichtigsten Beispiele für sogenannte alternierende Folge.

(2) für $0 \leq q < 1$ werden die Folgeglieder immer kleiner und konvergieren gegen Null. Diese geometrischen Folgen sind das Paradebeispiel für eine Nullfolge.

(3) Ein Folgeglied a_n lässt sich für $n \geq 2$ als **geometrisches Mittel** der beiden Nachbarglieder (= Wurzel aus deren Produkt) berechnen, denn aus $a_{n-1} = a_1 \cdot q^{n-2}$ und $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$ folgt

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot q^{n-2} \cdot a_1 \cdot q^n = a_1^2 \cdot q^{2n-2} = a_1^2 \cdot q^{2(n-1)} = a_1^2 \cdot q^{(n-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = \sqrt{a_1^2 \cdot q^{(n-1)^2}} = a_1 \cdot q^{n-1} = a_n$$

Es ist also $\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = a_n$

Beispiel 1:

Zu bestimmen ist das Bildungsgesetz der **geometrischen** Zahlenfolgen

a) $3\,;15\,;\ldots$

b) $a_2 = 5 \;;\; q = -3$

c) $a_1 = 27 \;;\; a_4 = 1$

Lösung:

zu a) Da es sich um eine geometrische Folge handelt, ist $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{15}{3} = 5$ mit $a_1 = 3$ und damit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 5^{n-1}$

zu b) Da es sich um eine geometrische Folge handelt, ergibt sich a_2 mit Hilfe von $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ zu $a_2 = a_1 \cdot q^{2-1}$. Zu lösen ist daher die Gleichung $5 = a_1 \cdot (-3)$

$$5 = a_1 \cdot (-3) \;\Leftrightarrow\; a_1 = -\frac{5}{3}$$

Damit ergibt sich $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = -\frac{5}{3} \cdot (-3)^{n-1}$

zu c) Da es sich um eine geometrische Folge handelt, ergibt sich a_4 mit Hilfe von $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ zu $a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$. Zu lösen ist daher die Gleichung $1 = 27 \cdot q^3$

$$1 = 27 \cdot q^3 \;\Leftrightarrow\; q^3 = \frac{1}{27}$$

$$\Leftrightarrow\; q = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$$

Damit ergibt sich das Bildungsgesetz zu $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

Beispiel 2:

Für den geplanten Bau eines Tunnels werden Probebohrungen durchgeführt. Der erste Kilometer der Probebohrung kostete 15.000 € und jeder weitere Kilometer 10% mehr als der vorhergehende. Wie hoch sind die Kosten für den 40igsten Kilometer?

Lösung:

Vorbemerkung: $p\,\%$ von a_n bedeutet $a_n \bullet \frac{p}{100}$, daher: 10% von a_n bedeutet: $0{,}1 \cdot a_n$

Es ist $a_{n+1} = a_n + 0{,}1 \cdot a_n = a_n \cdot (1 + 0{,}1) = a_n \cdot 1{,}1$. Damit liegt eine geometrische Folge mit $a_1 = 15.000$ und $q = 1{,}1$ vor. Die Kosten für den 40igsten Kilometer ergeben sich daher zu

$$a_{40} = a_1 \cdot q^{39} = 15.000 \cdot 1{,}1^{39} \approx 617.171$$

6.5.2 geometrische Reihe:

(1) spezielle endliche geometrische Reihe:

Die Summe

$$\mathbf{S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k}$$

heißt **spezielle** endliche geometrische Reihe.

Für diese Summe gilt für $q \neq 1$

$$\mathbf{S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Beweis:

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} \\ -q \cdot S_n & = & -q - q^2 - q^3 + \ldots - q^{n-1} - q^n \\ \hline S_n - q \cdot S_n & = & 1 - q^n \end{array}$$

Es ist also $S_n - q \cdot S_n = 1 - q^n$. Diese Gleichung lässt sich für $q \neq 1$ nach S_n auflösen.

$$\begin{aligned} & S_n - q \cdot S_n = 1 - q^n \\ \Leftrightarrow \quad & S_n \cdot (1 - q) = 1 - q^n \\ \Leftrightarrow \quad & S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

Die zweite Formel ergibt sich aus der ersten, indem man Zahler und Nenner des Bruches jeweils mit (– 1) multipliziert, d.h. den Bruch mit der Zahl „Eins“ erweitert:

$$\frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot \frac{-1}{-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

(2) allgemeine endliche geometrische Reihe:

Für die allgemeine geometrische Reihe

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}$$

gilt für $q \neq 1$:

$$\mathbf{S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Hinweis: Es spielt keine Rolle, ob der Faktor vor dem Bruch mit a oder a_1 bezeichnet wird.

Beweis:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 ; \dots ; a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$= a_1 \cdot \underbrace{(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1})}_{\text{spezielle geometrische Reihe}}$$

$$= a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

(3) Zusammenfassung geometrische Reihe:

Sei (a_n) eine geometrische Folge mit $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (also mit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$). Dann gilt für die **allgemeine** geometrische Reihe S_n:

$$\mathbf{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} & \text{falls } q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{falls } q = 1 \end{cases}}$$

Anwendungen: **exponentielle Verzinsung** („Zinseszins")
geometrisch-degressive Abschreibung
Rentenrechnung

Beispiel 1: Überraschende Ergebnisse

Berechnen Sie a) $1 + 2 + 4 + \dots + 1024$
b) $4 + 40 + 400 + 4000 + \dots + 4\,000\,000$

Lösung:

a) $1 + 2 + 4 + \dots + 1024 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 \dots + 2^{10}$ ist die spezielle geometrische Reihe mit $n = 11$ Summanden und $q = 2$. Es gilt daher

$$1 + 2 + 4 + \dots + 1024 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 \dots + 2^{10} = \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2047$$

b) $4 + 40 + 400 + 4000 + \dots + 4\,000\,000 = 4 + 4 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + \dots + 4 \cdot 10^6$ ist die allgemeine geometrische Reihe mit $n = 7$ Summanden und $q = 10$. Es gilt daher

$$4 + 40 + 400 + 4000 + \dots + 4\,000\,000 = 4 + 4 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + \dots + 4 \cdot 10^6$$

$$= 4 \cdot \frac{10^7 - 1}{10 - 1}$$

$$= 4\,444\,444$$

Beispiel 2: Rentenendwertformeln

Jährlich werde der gleiche Betrag r auf ein Konto eingezahlt, das jeweils am Jahresende mit Zinseszinsen zu p% verzinst wird. Gesucht ist der Kontostand R_n bei

a) **Nachschüssiger Einzahlung** (jeweils zum Jahresende):
b) **Vorschüssiger Einzahlung** (jeweils zum Jahresbeginn):

Lösung:

a)

Die erste Zahlung	wird	$(n-1)-\text{mal}$	verzinst
Die zweite Zahlung	wird	$(n-2)-\text{mal}$	verzinst
Die dritte Einzahlung	wird	$(n-3)-\text{mal}$	verzinst
⋮			
die vorletzte Einzahlung	wird	einmal	verzinst
die letzte Einzahlung	wird	keinmal	verzinst

Addiert man die einzelnen Beträge von unten nach oben, ergibt sich mit Hilfe der allgemeinen geometrischen Reihe und $q = 1+\frac{p}{100}$ der Kontostand R_n zu

$$R_n = r + r\cdot q + r\cdot q^2 + \ldots + r\cdot q^{n-2} + r\cdot q^{n-1} = r\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$$

b) Wird zu Jahresbeginn (vorschüssig) eingezahlt, wird schon die erste Einzahlung mitverzinst, insgesamt wird die erste Einzahlung daher $n-\text{mal}$, die zweite $(n-1)-\text{mal}$, ... , die letzte Einzahlung einmal verzinst. Der Kontostand nach n Jahren ergibt sich daher zu

$$R_n = r\cdot q + r\cdot q^2 + r\cdot q^3 + \ldots + r\cdot q^{n-1} + r\cdot q^n$$

$$= r\cdot q\cdot\underbrace{(1+q+q^2+q^3+\ldots+r\cdot q^{n-1})}_{\text{spezielle geometrische Reihe}} = r\cdot q\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$$

Hinweis: Um die Rentenendwertformeln unterscheiden zu können, wird in der Rentenrechnung der Rentenendwert nachschüssig mit R_n, der Rentenendwert vorschüssig mit R_n' abgekürzt.

Zahlenbeispiel:

Sie zahlen jeweils am Jahresende 1200 € auf ein Konto ein, das mit Zinseszinsen zu 2% verzinst wird. Wie hoch ist ihr Kontostand nach 10 Jahren?

$$S_{10} = 1200 + 1200\cdot 1{,}02 + 1200\cdot 1{,}02^2 + \ldots + 1200\cdot 1{,}02^9 = 1200\cdot\frac{1{,}02^{10}-1}{1{,}02-1} = 13.139{,}67\ €$$

graphische Darstellung von Folgen:

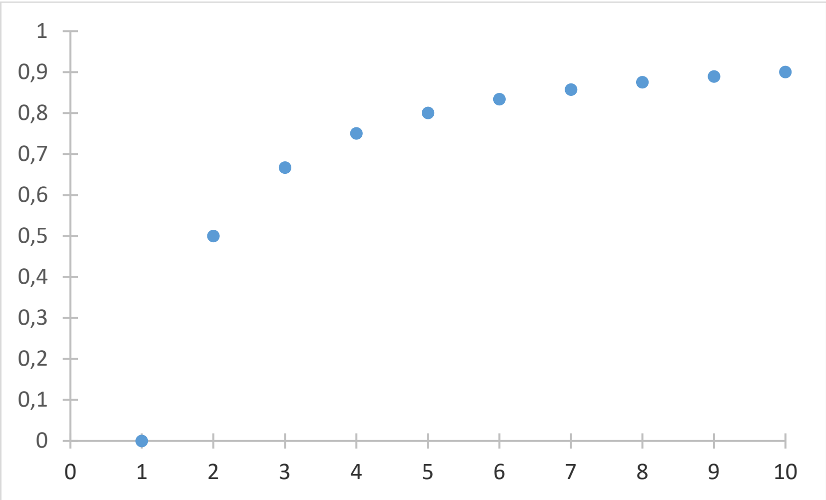
Reelle Zahlenfolgen lassen sich als Punkte auf dem Zahlenstrahl oder als Punkte der Ebene in einem Koordinatensystem darstellen.

Beispiel: Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n-1}{n}$, $(n = 1; 2; 3; \ldots)$ Die ersten 5 Folgeglieder ergeben sich zu $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2} = 0{,}5$, $a_3 = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$, $a_4 = \frac{3}{4} = 0{,}75$ und $a_5 = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

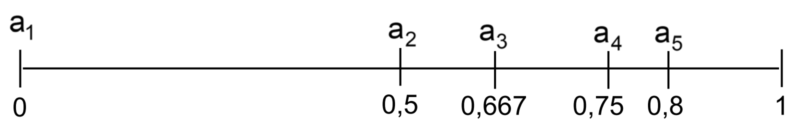
Weitere Folgeglieder sind z.B. $a_{10} = \frac{9}{10} = 0{,}9$ und $a_{20} = \frac{19}{20} = 0{,}95$

Darstellung im Koordinatensystem:

Der Graph einer Folge (a_n) besteht aus den Zahlenpaaren (n, a_n) $n \in \mathbb{N}$.



Darstellung auf dem Zahlenstrahl:



graphische Darstellung von arithmetischer und geometrischer Folge:

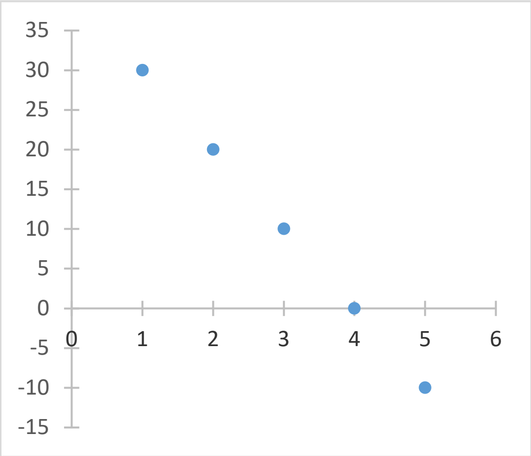
- Die arithmetische Folge entspricht einer linearen Funktion mit dem Definitionsbereich $\mathbb{N}$. Demzufolge entspricht der Graph einer arithmetischen Folge dem Graphen einer linearen Funktion.

- Die geometrische Folge entspricht einer Exponentialfunktion mit dem Definitionsbereich $\mathbb{N}$. Demzufolge entspricht der Graph einer geometrischen Folge dem Graphen einer Exponential-funktion.

Demzufolge sehen die Graphen der Folgen $a_n = 40 - 10 \cdot n$ bzw. $a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$ wie folgt aus:

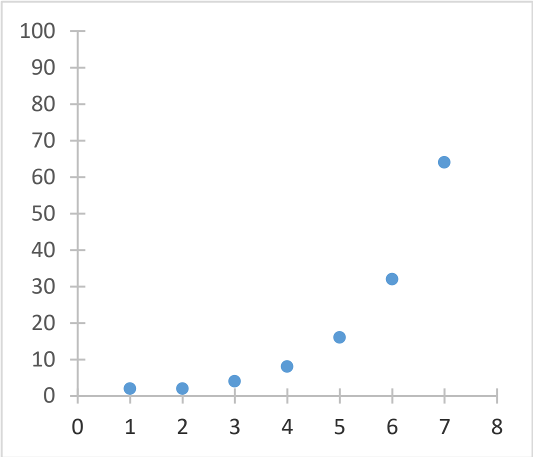
arithmetische Folge:

$$a_n = 40 - 10 \cdot n$$



geometrische Folge:

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$$



6.6 Grenzwert einer Folge und unendliche geometrische Reihe:

6.6.1 Grenzwert/Konvergenz:

Ein grundlegendes Prinzip der Analysis ist der Grenzwert bzw. die Konvergenz einer Zahlenfolge. Der Grenzwertbegriff in seiner modernen Form wurde erstmals durch Cauchy[1] formuliert.

Anschaulich formuliert:

Grenzwert einer Folge:

Eine Folge hat den Grenzwert a, wenn sich die Folgeglieder immer mehr dieser festen Zahl a annähern.

Schreibweise: Existiert der Grenzwert a, schreibt man

$$\lim_{n \to \infty} (a_n) = a$$

Sprechweise: Limes von a_n für n gegen unendlich ist gleich a

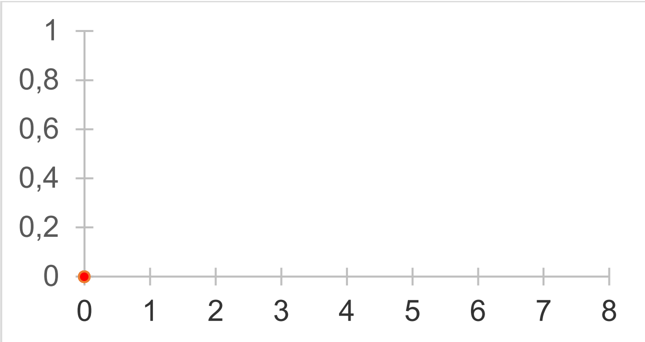
Folgen, die

- einen Grenzwert haben, nennt man **konvergent**
- keinen Grenzwert haben, nennt man **divergent**
- die den Grenzwert Null haben, heißen **Nullfolgen**

[1] Augustin Louis Cauchy, 1789-1857, französischer Mathematiker.

Beispiel:

Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Setzt man in diese explizite Form der Reihe nach die Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$ ein, ergeben sich die Folgeglieder $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$.



Die Mathematik dahinter:

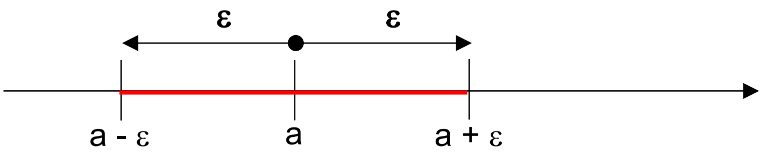
Mathematisch exakt definiert ist der Grenzwert einer Folge wie folgt:

Definition 1a:

Eine Folge (a_n) hat den Grenzwert a, falls in jedem noch so kleinen (offenen) Intervall um a herum, fast alle Folgeglieder liegen.

„fast alle Folgeglieder" bedeutet: alle Folgeglieder ab einem Index m.

Ein solches (offenes) Intervall um a wird in der Mathematik **ε-Umgebung von a** genannt und mit $U_\varepsilon(a)$ bezeichnet. **(ε = Epsilon)**



Bemerkung: Die ε-Umgebung von a besteht daher aus allen Zahlen, deren Abstand von a kleiner als ε ist.

Man könnte auch sagen:

Die ε-Umgebung von a sind genau die Lösungen der Betragsgleichung

$$|x - a| < \varepsilon \ ,$$

denn $|x - a|$ ist ja gerade der Abstand von x zu a.

oder

Die ε-Umgebung von a sind genau die Lösungen der Ungleichung

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$

Eine anderslautende Definition des Grenzwertes ist folgende:

Definition 1b:

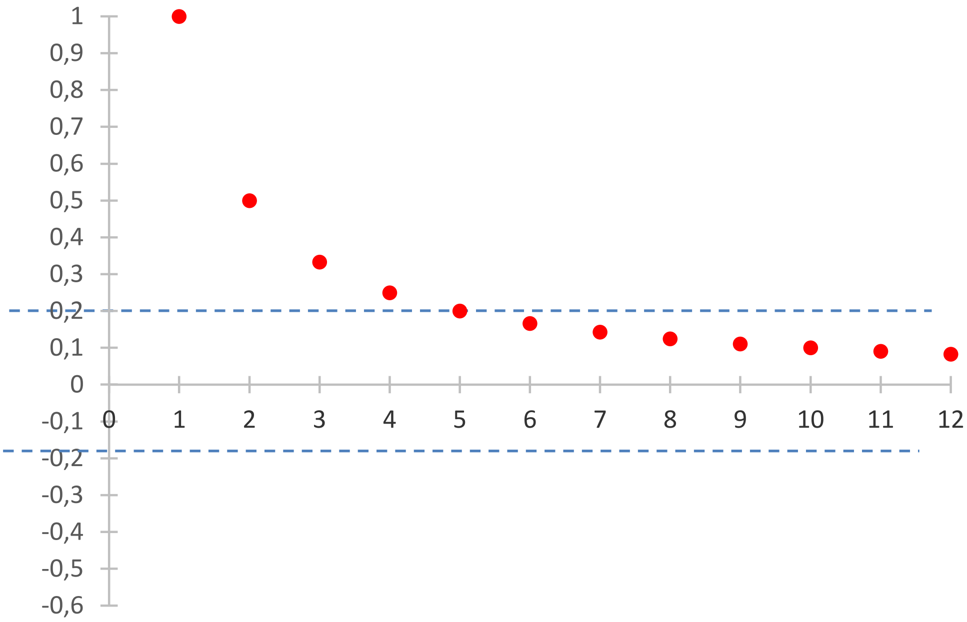
Der Grenzwert einer Zahlenfolge a_n ist eine Zahl a, an die sich die Folgeglieder ab einem bestimmten Index m beliebig genau annähern, d.h. der Abstand von a_n zur Zahl a beliebig klein wird.

Anschaulich bedeuten beide Definitionen einfach nur, dass sich die Folgeglieder immer mehr dem Grenzwert a annähern.

Beispiel zu den Definitionen:

Betrachtet man die Folgeglieder $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ der Folge $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt z.B. ab dem fünften Folgeglied a_5, dass alle weiteren Folgeglieder um weniger als 0,2 von $a = 0$ abweichen, d.h. $|a_n - 0| < 0{,}2$ für n > 5.

Ab dem 10ten Folgeglied a_{10} weichen alle weiteren Folgeglieder (unendlich viele) um weniger als 0,1 von Null ab, d.h $|a_n - 0| < 0{,}1$ für n > 10.



Zur Erinnerung: Der Abstand zweier reeller Zahlen ist der Betrag ihrer Differenz $|a - b|$

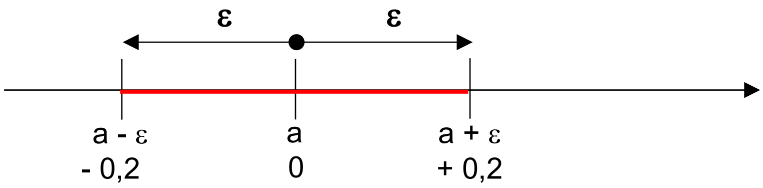
Für die Folge $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ lässt sich daher der Abstand von der Zahl a = 0 formal schreiben:

$$|a_n - 0| < 0{,}2 \quad \Leftrightarrow \quad a - 0 < a_n < a + 0 \quad \text{ab } n \geq 5$$

oder allgemein für eine beliebige positive Zahl ε (= Epsilon)

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

Skizze:



Die Frage ist jetzt:

Lässt sich für die Folge $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ zu **jeder** noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ ein bestimmtes Folgeglied a_n finden, d.h. einen Index $m = m(\varepsilon)$ so dass für alle n, die größer/gleich m sind, also für n = m ; n = m+1 ; n = m+2 … gilt:

$$|a_n - 0| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq m$$

Antwort: ja, so einen Index m (Zahl) lässt sich für diese Folge ganz allgemein finden!

Ab welcher Zahl m diese Bedingung erfüllt ist, hängt natürlich von ε (= Epsilon) ab.

Beweis:

Gegeben sei $\varepsilon > 0$. Gesucht ist eine Zahl m, so dass für alle $n \geq m$ gilt: $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Es ist $a_n = \frac{1}{n}$ und daher $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

Da alle Folgeglieder positiv sind, kann man auf die Betragsstriche verzichten. Es ist dann

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} < \varepsilon \quad |\cdot n \\ \Leftrightarrow \quad & 1 < n \cdot \varepsilon \quad |:\varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\varepsilon} < n \end{aligned}$$

Ab $n > \frac{1}{\varepsilon}$ – egal wie klein ε gewählt wird – weichen alle Folgeglieder um weniger als ε von Null ab.

Für unser Beispiel ergibt sich für $\varepsilon = 0{,}2$ daher $n > \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{0{,}2} = 5$, d.h. ab dem sechsten Folgeglied a_6 weichen alle Folgeglieder um weniger als $\varepsilon = 0{,}2$ von Null ab.

Für z.B. $\varepsilon = 0{,}003$ muss $n > \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{0{,}2} = 333{,}33\ldots$ also größer/gleich $m = 334$ sein, d.h. ab dem 334igsten Folgeglied a_{334} weichen alle Folgeglieder um weniger als $\varepsilon = 0{,}003$ von Null ab.

Hinweis: Zur Überprüfung der Grenzwertbedingung ist es nicht nötig, ein konkretes m anzugeben, erst recht nicht das kleinste (also „beste“) mögliche m. Es ist nur zu zeigen, dass es eine solche Zahl gibt.

Zusammenfassung:

Definition 2a:

Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge (a_n), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\left| a_n - a \right| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq m$$

Der Index m hängt im Allgemeinen von ε ab.

Eine etwas anschaulichere Definition des Grenzwertes gelingt mit Hilfe der ε-Umgebung von a:

Definition: ε-Umgebung von a: $U_\varepsilon(a)$

Für eine reelle Zahl a und ε > 0 heißt das offene Intervall um a

$$U_\varepsilon(a) = \{a_n \in \mathbb{R} : \left| a_n - a \right| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon ; a + \varepsilon)$$

die ε-Umgebung von a.

Damit lässt sich der Grenzwert einer Folge wie folgt definieren:

Definition 2b:

Eine Folge besitzt den Grenzwert a, wenn in jeder ε-Umgebung von a – egal wie klein ε gewählt wird **– ab einem Index m alle weiteren Folgeglieder liegen.**

Mit anderen Worten:

Eine Zahl a ist genau dann Grenzwert einer Folge, wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder liegen.

Die mathematische Sprechweise „*fast alle*“ meint: „alle bis auf endlich viele“. Anschaulich bedeutet das einfach nur, dass ich die Folgeglieder immer mehr dem Grenzwert a annähern.

Beispiel:

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. Setzt man der Reihe nach für n die Zahlen $10\,;100\,;1000$ ergeben sich die Folgeglieder zu

$$a_{10} = 0{,}90909...\,;\, a_{100} = 0{,}99...\,;\, a_{1000} = 0{,}999...$$

Vermutlich ist daher $\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = 1}$.

Beweis:

Um zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl $m(\varepsilon)$ zu finden, rechnet man oft versuchsweise rückwärts, indem man $|a_n - a| < \varepsilon$ nach n auflöst und dann den Beweis vom Ergebnis her aufbaut.

$$
\begin{aligned}
|a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad n+1 < \frac{1}{\varepsilon} \\
&\Leftrightarrow \quad n < \frac{1}{\varepsilon} - 1
\end{aligned}
$$

Wähle zu $\varepsilon > 0$ nun $m = \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
n > m \quad &\Rightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \\
&\Rightarrow \quad n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \\
&\Rightarrow \quad \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Damit ist bewiesen, dass $\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1}$

6.6.2 Grenzwertsätze für Folgen:

Zum Berechnen von Grenzwerten von Folgen kann man auf die im folgenden Satz festgehaltenen Eigenschaften konvergenter Folgen zurückgreifen:

Satz: Gegeben seien zwei **konvergente** Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ und eine beliebige natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Dann existieren auch die folgenden Grenzwerte und es gilt:

(1): Für konstante Folgen $(a_n = k)_{n \in \mathbb{N}}$: $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$

(2): „Faktorregel“: $\lim\limits_{n\to\infty} (k \cdot a_n) = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = k \cdot a$

(3): Für den Grenzwert der Summe der Folgen gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

(4): Für den Grenzwert des Produktes der Folgen gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$$

(5): Für den Grenzwert des Quotienten der Folgen gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad \text{falls } b \neq 0 \text{ und } b_n \neq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Die Regeln (3) bis (5) besagen, dass der Grenzwert einer Summe (Produkt/Quotient) von Folgen gleich der Summe (Produkt/Quotient) der Grenzwerte der einzelnen Folgen ist.

Beispiel 1: Zu bestimmen ist der Grenzwert der Folge $a_n = \frac{r}{p} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ mit r und p konstante Zahlen aus $\mathbb{R}$.

Lösung:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{p} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{r}{p} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \qquad \text{gemäß (1)}$$

$$= \frac{r}{p} \cdot \left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\right) \qquad \text{gemäß (3)}$$

$$= \frac{r}{p} \cdot \left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\right) \qquad \text{gemäß (1)}$$

$$= \frac{r}{p} \cdot (1 - 0) = \frac{r}{p}$$

Beispiel 2: Zu bestimmen ist der Grenzwert der Folge $a_n = \frac{3n - 7n^2}{10n^3 + 4n}$

Lösung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-7n^2}{10n^3+4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot (\frac{3n}{n^2} - 7)}{n^2(10n + \frac{4n}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{3}{n} - 7)}{(10n + \frac{4}{n})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3}{n} - 7)}{\lim\limits_{n\to\infty}(10n + \frac{4}{n})}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 7}{\lim\limits_{n\to\infty} 10n + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n}} = \frac{0-7}{\lim\limits_{n\to\infty}(10n) + 0}$$

$$= \frac{-\lim\limits_{n\to\infty} 7}{\lim\limits_{n\to\infty}(10n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-7}{10n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-7}{10} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{-7}{10} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} = 0$$

wichtige Folgen und deren Grenzwerte:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$, insbesondere $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e$

  und $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$, insbesondere $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. die Fakultät steigt schneller als jede Potenz

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{x^n} = 0$ für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ d.h. Potenzen steigen schneller als Polynome

6.6.3 unendliche geometrische Reihe:

Mittels Grenzübergang $n \to \infty$ wird aus der endlichen geometrischen Reihe $S_n = \sum_{n=1}^{k} a_1 \cdot q^{n-1}$ mit $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ eine unendliche geometrische Reihe.

Eine Reihe der Form $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n$ mit heißt unendlichen geometrische Reihe.

Die unendliche geometrische Reihe $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ konvergiert genau dann gegen eine Zahl S, wenn $|q| < 1$ ist. In diesem Falle gilt:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} \qquad (*)$$

Anwendung: **Barwert einer ewigen Rente/Unternehmensbewertung**

Bemerkung:

In Formelsammlungen findet man auch häufig die Formeln

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^n = a_1 \cdot \frac{q}{1-q} \quad \text{und} \quad S = \sum_{m=0}^{\infty} a_0 \cdot q^m = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}$$

Diese Formeln erhält man aus (*) durch Multiplikation beider Seiten mit q bzw. durch Indexverschiebung mit $m = k - 1$

Eine Frage:

Sie addieren unendlich viele positive Zahlen. Muss dann auch das Ergebnis unendlich groß sein? Kreuzen Sie an:

	Ja, natürlich
	Nein

Beispiel 1: Achilles und die Schildkröte

Der griechische Philosoph ZENON von Elea (490 bis 439 v.u.Z.) behauptete, dass **Achilleus** (latinisiert **Achilles),** der schnellste Läufer der Antike, eine Schildkröte, die einen gewissen Vorsprung hat, niemals wird einholen können, egal wie schnell er läuft.

Seine Begründung: Immer dann, wenn ACHILLES dort ankommt, wo die Schildkröte zuvor war, ist diese schon wieder an einem neuen Ort. Ihr Vorsprung verringert sich zwar immer mehr, verschwindet aber nie.

Zenon hat natürlich nicht Recht, aber wie kann man sein Argument mathematisch wiederlegen?

Dazu ein Zahlenbeispiel:

Angenommen, die Schildkröte hat 2 Meter Vorsprung und Achilles ist doppelt so schnell als die Schildkröte. Ist Achilles also 2 Meter gelaufen, ist die Schildkröte 1 Meter gelaufen. Läuft er 1 Meter läuft die Schildkröte einen halben Meter weiter usw. Betrachtet man die Einzelstrecken, die Achilles zurücklegt, so ergibt sich für deren Summe

$$S_n = 2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

Diese Summe beschreibt eine **unendliche geometrische Reihe** mit $a = 2$ und $q = 0{,}5$ und hat, da $|q| < 1$, den Grenzwert S:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots \\ &= 2 \cdot \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1-0{,}5} = 4 \end{aligned}$$

Achilles wird die Schildkröte also nach 4 Metern eingeholt haben.

Obwohl hier also unendliche viele Zahlen addiert werden, ist die Gesamtsumme endlich!

Beispiel 2: Umrechnung periodischer Dezimalzahlen in Bruchzahlen oder was ist $0{,}\overline{999}$?

$$0{,}\overline{999} = \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\ldots+ = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n}$$

Das ist eine unendliche geometrische Reihe mit $a = \frac{9}{10}$ und $q = \frac{1}{10}$.

Folglich ist $0{,}\overline{999} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1$

Allgemein kann jede Zahl als Reihe dargestellt werden, z.B. lässt sich eine Dezimalzahl mit einer Vorkommastelle und der Ziffernfolge (z_n) mit $(z_n \in 0\,;1;2\,;\ldots;9)$ als Reihe darstellen:

$$z_1, z_2 z_3 z_4 z_5 \cdots = \frac{z_1}{10^0} + \frac{z_2}{10^1} + \frac{z_3}{10^2} + \frac{z_4}{10^4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z_n}{10^{n-1}}\right)$$

z.B. die Eulersche Zahl $e = 2{,}7182\cdots = \frac{2}{10^0} + \frac{7}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \ldots$ oder

die Zahl $4073{,}28 = 4 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}$

Hinweis: Die Basis 10 ist übrigens willkürlich. Jede ganze Zahl $b \geq 2$ eignet sich als Basis für ein Stellenwertsystem, z.B. das Dualsystem mit $b = 2$ oder das Sexagesimalsystem mit $b = 60$

Kapitel 7: (reelle) Funktionen:

Funktionen bzw. Abbildungen sind ein grundlegendes Hilfsmittel zur mathematischen Beschreibung von Zusammenhängen verschiedener Größen. Beispiele sind etwa der Zusammenhang zwischen Umsatz und Preis einer Ware oder die Höhe eines Guthabens/Schuldenstandes zu einem bestimmten Zeitpunkt (Verzinsung).

7.1. Zuordnung, Funktion und Umkehrfunktion

Definition 7.1.1: Zuordnung

> **Eine Zuordnung ist eine Vorschrift** ('Spielregel')**, die den Elementen einer Menge D Elemente einer Menge W zuordnet.**

Beispiele:

(1) Den Studierenden werden deren Hobbys zugeordnet, beispielsweise Paula ihre Hobbys „Handballspielen und Mathematik" oder Paul sein Hobby „Musizieren".

(2) Dem Gewicht einer Sendung die Versandkosten der Sendung

(3) Dem Einkommen der Konsum

Definition 7.1.2: Funktion (Abbildung)

> **Eine Zuordnung f, die jedem Element x aus einer Menge D (in Zeichen: $x \in D$) genau ein Element y aus einer Menge W (in Zeichen: $y \in W$) zuordnet, heißt Funktion oder Abbildung. Man schreibt dafür: $f: D \mapsto W$**

reelle Funktionen:

Sind D und W die Menge der reelle Zahlen oder Teilmengen, heißen die Funktionen reelle Funktionen. Man schreibt dann $f: D_f \mapsto \mathbb{R}$, wobei der Definitionsbereich D_f eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder ganz $\mathbb{R}$ ist (in Zeichen: $f: D_f \subseteq \mathbb{R}$).

Die Menge $\mathbf{D_f}$ heißt **Definitionsbereich** (Definitionsmenge) von f,

Die Menge $\mathbf{W_f}$ heißt **Wertebereich** (Wertemenge) von f.

Die Variable **x** heißt **unabhängige Variable** (Argument)

Die Variable **y** wird dann mit **f(x)** – gesprochen „f von x" – bezeichnet und heißt die von x **abhängige Variable**

Definitionsbereich:

Ist $f: D_f \mapsto \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, dann ist der Definitionsbereich D_f die Menge aller Zahlen, für die die Funktion f definiert ist.

Salopp gesagt: Der Definitionsbereich ist die Menge aller Zahlen, die in die Funktionsgleichung eingesetzt werden **dürfen**, nicht **können**! Sie *können* nämlich bei Rot über die Ampel fahren, *dürfen* aber nicht.

Darstellungsweisen des Definitionsbereichs:

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Definitionsbereich anzugeben:

Mengenschreibweise:

$D = \{x \in \mathbb{R} | \; x < 13\}$: Der Definitionsbereich besteht aus allen Zahlen kleiner 13

$D = \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$: Der Definitionsbereich besteht aus allen reellen Zahlen außer der Zahl x_1

Intervallschreibweise:

$D = [-\infty\,; x_1]$: Der Definitionsbereich besteht aus allen reellen Zahlen von $-\infty$ bis zu x_1.

$D = \mathbb{R} \setminus [x_1\,; x_2]$: Der Definitionsbereich besteht aus allen reellen Zahlen außer den Zahlen zwischen x_1 und x_2.

Bestimmung des Definitionsbereichs:

Um den Definitionsbereich zu bestimmen, muss herausgefunden werden, für welche Zahlen die gegebene Funktion nicht definiert ist. Diese Zahlen müssen dann aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden. Das Vorgehen zur Bestimmung des Definitionsbereichs einer Funktion hängt vom Funktionstyp ab, z.B. darf der Nenner eines Bruches nicht Null sein oder der Radikand einer Quadratwurzel nicht negativ.

Beispiele von Funktionen, die nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind:

- gebrochen-rationale Funktionen $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$
- Wurzelfunktionen mit geradem Wurzelexponenten $f(x) = \sqrt[2n]{u(x)}$
- Logarithmusfunktionen $f(x) = \ln[u(x)]$

Beispiel 1:

Zu bestimmen ist der Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 9}$

Lösung: Hier darf die Nennerfunktion $v(x) = x^2 - 9$ nicht Null sein. Setzt man $x^2 - 9$ gleich Null, ergeben sich die Lösungen $x_1 = -3$ oder $x_2 = +3$. Diese Zahlen müssen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden.

Der Definitionsbereich besteht daher aus allen reellen Zahlen außer den Zahlen $x_1 = -3$ und $x_2 = +3$.

kurz: $D_f =$ alle reellen Zahlen außer -3 und 3

in Zeichen: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;+3\}$

Beispiel 2:

Zu bestimmen ist der Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \sqrt[4]{x+5}$

Lösung: Hier muss der Radikand $x + 5$ größer/gleich Null sein, also $x \geq -5$

$D_f =$ alle reellen Zahlen größer/gleich - 5 (in Zeichen: $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq -5 \right\}$)

Beispiel 3:

Zu bestimmen ist der Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \ln(3 - x)$

Lösung: Logarithmusfunktionen sind nur für positive reelle Zahlen definiert. Daher muss hier $3 - x$ größer Null sein und damit $x < 3$

$D_f =$ alle reellen Zahlen kleiner 3

in Zeichen: $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < -5 \right\}$

Beispiel 4:

Der Preis p einer Ware A hängt linear von der der Verkaufsmenge x ab und wird durch die Funktionsgleichung $p(x) = 5 - 2{,}5x$ wiedergegeben. Zu bestimmen ist der Definitionsbereich.

Lösung: Hier steht die Variable x für eine Menge und $p(x)$ für den Preis. Beide müssen daher größer/gleich Null sein. $p(x) \geq 0 \iff x \leq 2$. Der Definitionsbereich ergibt sich damit zu

$D_f =$ alle reellen Zahlen zwischen 0 und 2

in Zeichen: $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 \leq x \leq 2 \right\}$

Beispiel 5:

Zu bestimmen ist der Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

Lösung: Logarithmusfunktionen sind nur für positive reelle Zahlen definiert. Die innere Funktion $u(x) = x^2 - 4$ muss daher Werte größer als 0 liefern. Dazu berechnet man zunächst die Nullstellen von $u(x)$.

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ oder } x_2 = +2.$$

Jetzt muss noch überprüft werden, in welchen Bereichen der Funktionsterm $x^2 - 4$ positiv ist. Berechnet man beispielsweise den Funktionswert der inneren Funktion an der Stelle $x = 0$, ergibt sich

$$u(1) = 1^2 - 4 = -3 < 0$$

Damit weiß man, dass die innere Funktion zwischen -2 und +2 negativ oder gleich Null ist. Diese Zahlen müssen also ausgeschlossen werden. Demnach besteht der Definitionsbereich aus allen reellen Zahlen außer den Zahlen zwischen -2 und 2.

In Zeichen: $D_f = \mathbb{R} \setminus [-2;2]$

Wertebereich:

Der Wertebereich ist die Menge aller möglichen Funktionswerte

Funktionswert:

Die einer Zahl a aus D_f eindeutig zugeordnete Zahl $f(a)$ heißt Funktionswert der Funktion an der Stelle a.

Graph einer reellen Funktion

Als Funktionsgraph G_f einer reellen Funktion f bezeichnet man die Menge aller geordneten Zahlenpaare $(x, f(x))$ aus den Zahlen x der Definitionsmenge und den zugehörigen Funktionswerten f(x).

$$\text{In Zeichen: } G_f = \left\{ (x, f(x) \middle| \, x \in D \subseteq \mathbb{R} \right\}$$

Der Graph einer Funktion $f: D_f \mapsto \mathbb{R}$ mit $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Teilmenge des cartesischen Produktes $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ und kann somit als Punktmenge in der Ebene aufgefasst werden.

Fazit:

Zur präzisen Angabe einer Funktion f gehören **Definitionsbereich, Wertebereich** und **Zuordnungsvorschrift**. Die Zuordnungsvorschrift wird meist durch eine Funktionsgleichung beschrieben, kann aber auch durch eine Wertetabelle oder ein Pfeildiagramm angegeben werden.

Schreibweisen:	**allgemein**	**Beispiel:**
	$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_0^+$
	$x \mapsto f(x)$	$x \mapsto x^2$
	$y = f(x)$	$f(x) = x^2$

Vielfach ist eine geschlossene Darstellung der Funktion mit Hilfe einer einzigen Funktionsgleichung nicht möglich, sondern muss auf Intervalle begrenzt werden. Solche Funktionen heißen abschnittsweise definierte Funktionen.

Definition 7.1.3: abschnittsweise definierte Funktionen:

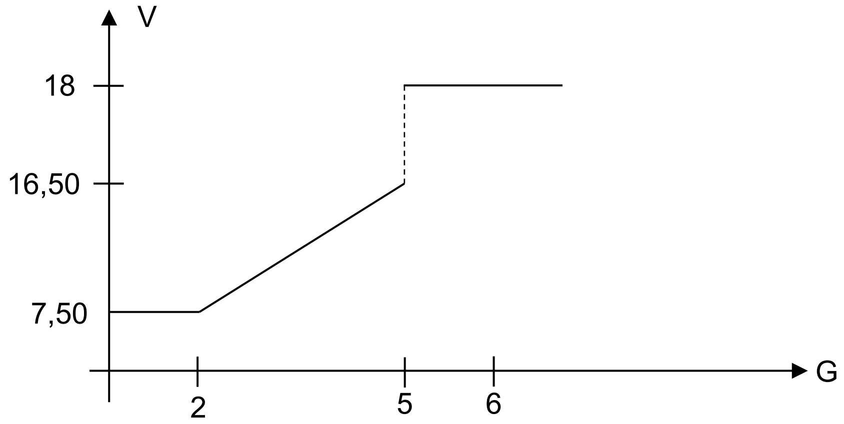
Funktionen, die sich aus mehreren Funktionen für bestimmte Definitionsbereiche zusammensetzen, heißen abschnittsweise definierte Funktionen.

Beispiel:

Die Versandkosten V für ein Post-Paket hängt vom Gewicht G des Pakets ab (fiktive Zahlen):

Gewicht in kg	Versandkosten in Euro
bis zu 2	7,50
über 2 bis 5	3x+1,5
über 5 und mehr	18

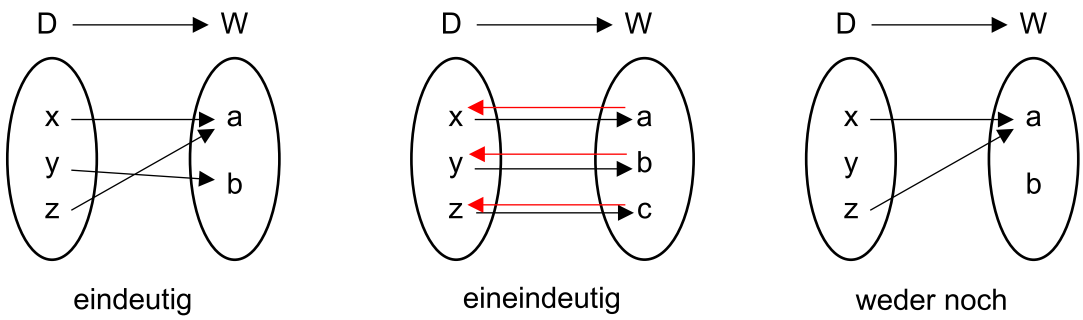
Skizze:



Definition 7.1.4: eindeutige und eineindeutige Zuordnungen:

eindeutig: **Jedem Element der Menge D_f wird genau ein Element der Menge W_f zugeordnet.**

eineindeutig **Jedem Element der Menge D_f wird genau ein Element der Menge W_f zugeordnet und umgekehrt wird auch jedem Element der Menge W_f genau ein Element der Menge D_f zugeordnet.**



Definition 7.1.5: Umkehrfunktionen (inverse Funktionen)

> **Eine Funktion f heißt umkehrbar, wenn sie eineindeutig ist,**
>
> **d.h. wenn jedem Element x aus dem Definitionsbereich genau ein Wert y aus dem Wertebereich und umgekehrt jedem Element y aus dem Wertebereich genau ein Element x aus dem Definitionsbereich zugeordnet ist.**

Die Umkehrfunktion einer Funktion f wird mit f^{-1} bezeichnet.

Es gilt:

- Für umkehrbare Funktionen muss gelten: $D_{f^{-1}} = W_f$
- Jede eineindeutige Funktion f ist umkehrbar.
- Jede streng monotone Funktion ist umkehrbar.
- Die graphische Darstellung der Umkehrfunktion f^{-1} ergibt sich durch **Spiegelung** von f an der Winkelhalbierenden y = x.

Beispiele:

(1) aus der Schule bekannt:

Funktion:	**Umkehrfunktion:**
Quadratische Funktion	**Wurzelfunktion**
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$	$\mathbf{f}: \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}_0^+$
$\mathbf{f(x) = x^2}$	$\mathbf{f(x) = \sqrt{x}}$
Exponentialfunktion	**Logarithmusfunktion**
$\mathbf{f}: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$	$\mathbf{f}: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}_0^+$
$\mathbf{f(x) = e^x}$	$\mathbf{f(x) = \ln(x)}$

ökonomisches Beispiele:

(1) Nachfragefunktion und Preis-Absatzfunktion

Die **Nachfragefunktion** $x(p)$ gibt die Nachfragemenge x eines Gutes in Abhängigkeit vom Preis an. **Die Preis-Absatz-Funktion** $p(x)$ ist die Umkehrfunktion der Nachfragefunktion und gibt den Preis in Abhängigkeit von der Nachfragemenge an. Sie wird auch inverse Nachfragefunktion genannt.

(2) Produktions- und Kostenfunktion

Die Produktionsfunktion gibt an, wie viel Output x = x(r) durch Einsatz einer bestimmten Menge Input r erzeugt werden kann. Umgekehrt kann man sich auch überlegen, wie viel Input man für eine festgelegte Menge Output braucht. Das ist dann die Funktion r = r(x), was mathematisch die Umkehrfunktion der Produktionsfunktion darstellt. Aus der Umkehrfunktion r = r(x) lässt sich dann die Kostenfunktion K(x) bestimmen.

$$K(x) = p \cdot r(x) \quad p = \text{Preis pro Inputfaktor } r$$

Berechnung von Umkehrfunktionen:

Ob eine Funktion umkehrbar ist, ist schnell feststellbar. Lässt sich $y = f(x)$ eindeutig nach x auflösen, dann ist f umkehrbar!

Vorgehen:

- Setze $y = f(x)$ und löse die Gleichung nach x auf
- Vertausche die Variablennamen x und y
- Setze $f^{-1}(x) = y$

Bemerkung: Haben die Variablen feste Bedeutungen, darf nach Bildung der Umkehrfunktion **kein** Variablentausch durchgeführt werden.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der Funktion $f(x) = 2 \cdot \sqrt{0{,}25 \cdot x^2 - 6}$.

Lösung: $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 24}$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der Funktion $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Lösung:

$$y = \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad y \cdot (x+1) = x$$

$$\Leftrightarrow \quad yx + y = x$$

$$\Leftrightarrow \quad yx - x = -y$$

$$\Leftrightarrow \quad x(y-1) = -y$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-y}{y-1}$$

Aufgaben zu den Kapiteln:

zu Kapitel I: Aufgabenblatt 01

1. Gegeben seien die Mengen $A = \{3,4,6,7\}$, $B = \{3,5,6\}$ und $C = \{4,5,2,1\}$. Bilden Sie die Mengen $A \cap B$, $A \cup C$, $(A \cap B) \cup C$, $(A \cap C) \cap B$ und geben Sie diese in aufzählender Form an.

2. Geben Sie alle Teilmengen der Menge $\{\text{rot}, \text{gelb}, \text{blau}\}$ an. Wie viel Teilmengen sind es?

3. Wie viele Teilmengen hat eine n-elementige Menge? (Begründung?)

4. Durch welche charakterisierende Eigenschaften kann die Menge $M = \{2,4,6,8,10,,,,\}$ beschrieben werden?

5. Gegeben sei die Menge $A = \{x \mid -3 < x < 4\}$. Beschreiben Sie die Menge A in aufzählender Form

   a) in der Grundmenge der natürlichen Zahlen
   b) in der Grundmenge der ganzen Zahlen.

6. Welche Beziehung besteht zwischen den Mengen aus Aufgabe 5a) und 5b) ?

7. Geben Sie die Menge der Buchstaben des Wortes Mengenlehre in aufzählender Form an.

8. Die Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses A ist definiert als

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\text{Gesamtheit aller möglichen Fälle}}$$

   Voraussetzung: Die Elementarereignisse E_i, $i = 1,...,n$ sind alle gleichwahrscheinlich. Der Zufallsversuch bestehe nun aus dem einmaligen Werfen eines *fairen* Würfels mit der Menge Ω (Omega) der möglichen Elementarereignisse $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Ferner seien folgende Ereignisse gegeben:

   A = {„eine gerade Zahl würfeln“}
   B = {„eine drei oder eine fünf würfeln“}
   C = {„eine ungerade Zahl würfeln“}
   D = {„eine eins, zwei oder drei würfeln“}

   Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

   a) $P(A)$ b) $P(A \cap C)$ c) $P(A \cup C)$ d) $P(B \cap D)$

9. Für eine natürliche Zahl n bezeichne T_n die Menge aller natürlichen Zahlen, die n ohne Rest teilen. So ist beispielsweise $T_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$. Beschreiben Sie die Mengen T_{20}, T_{30}, $T_{20} \cap T_{30}$ und $T_{20} \cup T_{30}$ durch Aufzählung ihrer Elemente. Gibt es natürliche Zahlen a, b mit $T_a = T_{20} \cap T_{30}$ bzw. $T_b = T_{20} \cup T_{30}$, wenn ja , welche?

zu Kapitel II: Aufgabenblatt 01:

1. Multiplizieren Sie folgende Klammern aus

   a) $5(a+b-c)$ b) $-3(x-2y+3z)$
   c) $(2a-3b)\cdot(-a)$ d) $(3a-b)\cdot(10-a+b)$

2. Verwandeln Sie in ein Produkt

   a) $2ax-3bx-6x^2$ b) $ac+bc+ad+bd$
   c) $10xu+6xw-15yu-9yw$ d) $5u(2x-3y)-2x+3y$
   e) $48a^2x-72abx+27b^2x$ f) $3ac^2+6acd+3ad^2-2bc-4bcd-2bd^2$

3. Vereinfachen Sie
   a) $2-4(3-2(8-7(5-4)+2)-9)$
   b) $4x-[2y-(4x-6y)+7x]-6y$

4. Fassen Sie den Term $-12(a-3b)-\frac{1}{2}(-24a+18b)+2x^2y-3u^2v+2yx^2$ zusammen und geben Sie die verwendeten Rechengesetze an.

5. Verwandeln Sie – wenn möglich – in eine binomische Formel. Begründen Sie für die Fälle, in denen Sie nicht in eine binomische Formel umformen können, warum.

   a) $4x^2+12x+9=$
   b) $64x^2-32x+4=$
   c) $16x^2-25x+9=$
   d) $x^2-4=$
   e) $9x^2-4=$
   f) $\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{3}x+4=$
   g) $9x^2+13x+4=$
   h) $\frac{1}{16}x^2+2x+4=$
   i) $\frac{1}{4}x^2-x+1=$
   j) $x^2-x+\frac{1}{4}=$
   k) $b^2-a^2=$
   l) $x^2-122=$

zu Kapitel II: Aufgabenblatt 02:

1. Kürzen Sie folgende Brüche. Verwandeln Sie dazu Zähler und Nenner in Produkte:

a) $\frac{144}{168}$ b) $\frac{33ax-6bx}{27ay-9by}$ c) $\frac{2a^2+2ab+3a+3b}{5a+5b}$ d) $\frac{64s^2-36t^2}{40s+30t}$

e) $\frac{3au-4av+6bu-8bv}{av-3au+2bv-6bu}$ f) $\frac{-x+2a}{-2a+x}$

2. Berechnen Sie (ohne Taschenrechner)

a) $\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$ b) $(\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4})\div\frac{5}{6}$ c) $\frac{15}{96}\div\frac{25}{18}$ d) $\frac{y^2}{2a}\div\frac{2y^2}{5a}$

e) $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ f) $\frac{2x+5}{2x+3}-\frac{5x-3}{5x-7}$

3. Vereinfachen Sie

a) $(\frac{a}{4x}-\frac{b}{3x}+\frac{2c}{3x})\cdot\frac{24x}{3a-4b+8c}$ b) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ c) $\frac{a-b}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}:\frac{a-b}{ab}$

4. Stellen Sie die folgenden Brüche als Dezimalzahlen dar (ohne Taschenrechner):

a) $\frac{27}{125}$ b) $\frac{11}{8}$ c) $3\frac{4}{5}$

5. Wo liegt der Fehler?

Paul möchte seiner jüngeren Schwester Paula einreden, dass $5=0$ ist. Er rechnet ihr in vier Rechenschritten vor:

	$a+b = c$	$\cdot 5$
1. Schritt:	$5\cdot a+5\cdot b = 5\cdot c$	$-5\cdot c$
2. Schritt:	$5\cdot a+5\cdot b-5\cdot c = 0$	5 ausklammern
3. Schritt:	$5\cdot(a+b-c) = 0$	beide Seiten durch $(a+b\text{-}c)$ dividieren
4.Schritt:	$\frac{5\cdot(a+b-c)}{(a+b-c)} = \frac{0}{(a+b-c)}$	mit $(a+b\text{-}c)$ kürzen
ergibt	$5 = 0$	

Wo liegt der Fehler?

zu Kapitel II: Aufgabenblatt 03:

1. Vereinfachen Sie

a) $\left(\frac{m}{n}\right)^3 \div \frac{m^4}{n^5}$ b) $\frac{m^{n-4}}{m^{n-5}}$ c) $(\frac{a^{-3}b^2}{c})^2 \cdot (\frac{b^3}{a^5c})^{-1}$

2. Berechnen Sie (ohne Taschenrechner):

a) $\sqrt[3]{-8}$ b) $64^{\frac{10}{60}}$ c) $\sqrt[10]{4^5}$ d) $\sqrt[10]{3^{20}}$

3. Vereinfachen Sie

a) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^5} \cdot \sqrt[3]{ab^2}}$ b) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ c) $\frac{1}{a^{n+1}} + \frac{2}{a^{n-2}} - \frac{a-1}{a^n}$

4. Erweitern Sie den Bruch so, dass der Nenner ganzzahlig wird

a) $\frac{3\sqrt{2}+5\sqrt{3}}{5+\sqrt{6}}$ b) $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{a^2-1}+a}$

5. Lösen Sie die Klammern auf

a) $\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[4]{b}\right)^2$

b) $\left(a^{\frac{1}{5}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^2$

c) $\left(2\sqrt[2]{a} - 3\sqrt[3]{b}\right) \cdot \left(2\sqrt[2]{a} + 3\sqrt[3]{b}\right)$

6. Berechnen Sie ohne Taschenrechner folgende Logarithmen

a) $\log_5 25$ b) $\log_2 1024$ c) $\ln(e \cdot \sqrt[3]{e})$

7. Fassen Sie $2 \cdot \ln(u) + 3 \cdot \ln(v)$ zu einem einzigen Logarithmus zusammen

8. Ein Kapital von 50.000 € wird zu einem bestimmten Zinssatz angelegt. Nach 5 Jahren ist das Anfangskapital auf 60.832,65 € angewachsen. Zu welchem Zinssatz wurde das Kapital verzinst?

9. Wie lange müsste ein Kapital von 20 000 € zu 5% Zinsen angelegt werden, damit es sich verdoppelt?

zu Kapitel III: Aufgabenblatt 04:

Für alle Aufgaben seien die reellen Zahlen die Grundmenge.

1. Lösen Sie folgende Gleichungen:

   a) $5x + 14 = 21 - 2x$

   b) $3x - 0{,}75x - 15/4 = x/4 + 0{,}25$

   c) $2 \cdot (4x + 3) - 3\,(4 - x) \;=\; x - 5 \cdot (3 - 2x) + 9$

2. Lösen Sie

   a) $\dfrac{1}{x+5} = \dfrac{2}{x-2}$

   b) $\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{4}{x+3} = \dfrac{16}{x^2 - 9}$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichungen

   a) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

   b) $x^2 - 4x + 1 = 0$

   c) $4x^2 + 12x + 14 = 0$

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen

   a) $\sqrt{8x - 7} + 3 = 2x$

   b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

   c) $\dfrac{2x+8}{2x-4} = \dfrac{7x+4}{4x-2}$

5. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichung mit Hilfe der Polynomdivision

   $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

zu Kapitel III: Aufgabenblatt 05: Für alle Aufgaben seien die reellen Zahlen die Grundmenge.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen.

(a) $2(2x-4)-5(x-4)=0$

(b) $10x-7-(-4x-11)=-(-4x+6)$

(c) $(4x+3)^2+(2x-5)^2=2(17-3x)$

(d) $(2x+3)\cdot(x-4)=(3x-8)(x-3)$

(e) $(2x^2-x-10)\cdot(2x-5)=0$

(f) $2x\cdot(5-x)=4(6+x)-2x^2$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen und geben Sie – falls nötig – die einschränkenden Bedingungen (den Definitionsbereich) an.

a) $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

b) $\sqrt{x(x-8)} = 3$

c) $\sqrt{5z-5} + 5 = 0$

Aufgabe 3:

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $\frac{95}{b}\cdot b^{-19}=265$

b) $3{,}2=\frac{24\cdot t}{t^2+9}$

c) $600\cdot\frac{5-0{,}01\cdot x}{x+5}=95$

d) $30=10+\frac{40}{40-2x}$

e) $10.000+\frac{120.000}{q^2}=90.000+\frac{10.000}{q}+\frac{10.000}{q^2}$

f) $\frac{1}{x+4}+\frac{x}{x-4}=\frac{16x-32}{x^2-16}$

g) $(2x^2-x-10)\cdot(2x-5)=0$

Aufgabe 4:

Lösen Sie folgende Gleichungen und interpretieren Sie Ihre Lösung als Anzahl der Nullstellen von Funktionen.

a) $3x^2+6x+9=0$ b) $2x^2-2x-4=0$ c) $4x^2-\frac{8}{3}x+\frac{4}{9}=0$

zu Kapitel III: Aufgabenblatt 06:

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen (Grundmenge reelle Zahlen)

   a) $3^{2x+1} = 7^{x-3}$

   b) $a^{3x+1} = b^{5x-4}$

   c) $\ln 5^x = \ln 2^x + 2$

2. Lösen Sie die folgenden Gleichungen: (Grundmenge reelle Zahlen)

   a) $6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0$

   b) $\frac{1}{2}e^x - e^{x+1} = 0$

3. Lösen Sie folgende Gleichung: (Grundmenge reelle Zahlen)

   $e^x - \frac{5}{4}e^{-x} + 2 = 0$

4. Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen: (auf ganze Zahlen gerundeten):

   a) $k(x) = 0{,}02x^3 - 1{,}5x^2 - 4000$

   b) $z(x) = 0{,}16x - 12 - \frac{800}{x^2}$